

今後の研究計画

これまでの研究とその成果を踏まえ、引き続きダイアグラムを視点とし、多項式不変量を通した結び目の性質の研究を計画している。特に正結び目の幾何的性質を解明することを目的とする。具体的な計画として以下の4つを柱に据えている。以下、論文番号は「研究業績」に示した番号に対応する。

1. 正結び目の最小交点数問題に取り組む。

与えられた結び目のダイアグラムの最小性を判定することは結び目理論の基本問題であり、交代結び目ではその既約な交代ダイアグラムが常にその結び目の最小ダイアグラムを与えることが知られている。正結び目に関して、この事実に対応する問題「正結び目の最小ダイアグラムは正で実現されるか？」は Stoimenow により否定的に解決された。つまり、正ダイアグラムが最小でない正結び目が発見された。しかし実際に正ダイアグラムが最小を与えるものも多数あり、そうでないものとの“性質の差”を幾何的、代数的に解析する。

正ダイアグラムが最小である結び目はトラス結び目や正交代結び目 (論文 [2]), 種数 2 以下の正結び目など多数存在するが、正ダイアグラムが最小でない結び目は Stoimenow の結び目と論文 [6] で構成したものなどまだ例が少ない。そこでそのような正結び目の無限族を構成する。その一つとして、論文 [6] で提示した無限族の候補が性質 P を持つことを証明する。論文 [6] で用いた性質 P を持つことの証明法は交点数の小さい正結び目に対してのみ有効と思われる、まずは、これを改良する。また、論文 [6] で構成した正結び目は種数 3 の正ファイバー結び目で、強い性質を持ち、性質 P を持つことの証明にこの強い性質を利用している。よって、より強い代数的、幾何的性質を持った正結び目族を構成することも計画の一つである。

2. 正結び目補空間内の曲面の交わりの解析による正結び目の特徴付け。

「同じ交代結び目の交代ダイアグラムはフライブという局所変形のみで移り合う」という Tait のフライブ予想を解決した Menasco-Thislethwaite の手法は交代結び目補空間内の曲面の交わりの解析の一連の仕事の集大成によるものであり、この手法を正結び目補空間に対応できるように改良、また新たな視点を見つけることを目的とする。

論文 [6] で構成した性質 P を持つ正結び目において、正として最小のダイアグラムから最小ダイアグラムに変形する過程は、交点数を一旦上げ、負の交点を作ってから落とすというものである。この交点数が上がって落ちる様子の特徴付けを補空間の構造、特に補空間内の曲面の交わりを調べることで与える。正結び目補空間に対しては Ozawa による本質的閉曲面の特徴付けの仕事があり、これを始点として正結び目補空間内の曲面、特にダイアグラムと関連がある標準的曲面の様子を考察する。正ダイアグラムから得られる標準的曲面を村杉和分解していくと正交代ダイアグラムからの標準的曲面が得られるため、正結び目補空間内の曲面の解析において村杉和分解も絡めて考察することにより交代結び目との関連も期待できる。

また、この応用として衛星型正結び目の特徴付けができるかと考えている。この研究は Dehn 手術でレンズ空間やスモールザイフェルト多様体を産む結び目の双曲性の判定に有用であると思われる、3次元多様体論における例外型 Dehn 手術の研究や3次元多様体の幾何化予想への一つのステップである。

3. 代数的不変量による、まだ見出されていない数量的幾何不変量への評価を発見する。

結び目の種数や最小交点数などの数量的幾何不変量の決定は Alexander 多項式, Jones 多項式, HOMFLY 多項式の既約次数や符号数など様々な代数的不変量による評価から得られたものである。これに対し、まだ見出されていない評価式の成立を目的とする。これには新しい代数的不変量の発見も含まれる。

近年、カンドルと呼ばれる代数系を用いた新しい結び目不変量が定義され、2次元結び目理論に応用されている。(2次元結び目の射影図に対して、その3重点の最小個数の評価に用いられている。)この不変量はカンドルと可換群とその間の表現(コサイクル)の組に対して不変量の一つ決まるというもので、新しい不変量自体の構成とその応用の確立を目指す。特に正結び目の数量的幾何不変量の評価に対応させるため、このカンドルからの不変量がダイアグラムから直接計算できるようスケイン関係式等を定義する。

また、最近の結び目フレア-ホモロジーが結び目の種数や4次元種数を評価するという点に関し、その膨大な計算の簡略化も計画の一つである。

4. 結び目の標準的曲面の研究

標準的曲面は Seifert のアルゴリズムで得られるという定義である。このアルゴリズムは結び目が張る曲面を構成するという点では優れているが、このアルゴリズムが幾何的に何を表しているのかなどは問題として提起されるべきである。したがって標準的曲面の幾何的特徴付けを行なうことは重要なことであると考えられる。

この標準的曲面の研究に関しては、予想「結び目の最小交点数その二重化結び目の標準的種数が一致する」の解決を目指す。論文 [7] 以降の進展として、交代結び目に対しては論文 [7] での手法を改良することで予想の成立を証明しようと計画している。そこでその手法の改良が第一段階である。また他の結び目に対してはまったく別の方法を考えなければいけないことも分かっている。

一方、最近の研究により、論文 [8] においてすべての標準的曲面が組み紐と関連がある曲面としての表示を持つことを示した。これにより、標準的曲面の“標準形”というものが組み紐理論を通して構成できると考えられる。これは標準的曲面の幾何的特徴付けに通じる。