これまでの研究成果

現在まで, 結び目のダイアグラムを視点とした数量的幾何不変量, 多項式不変量及びそれらの関連性に興味を持ち研究を進め, 具体的に次のような成果を得た. 以下, 論文番号は 「研究業績」に示した番号に対応する.

1. 正結び目の幾何的性質の研究

結び目理論は多様体内の結び目の “位置” を研究するもので, 各結び目型に対して “良い位置” を与えること, それをダイアグラムで表示することが基本的な問題である. 一般にダイアグラムの各交点には正と負の二種類が現れ, 正の交点だけを持つ**正ダイアグラム**を許容する結び目を**正結び目**という. この正ダイアグラムがどのような “良い位置” を与えているか, また**すべての交点が正**というダイアグラムの性質が結び目の性質にどのような影響を与えているかを解明するため, その数量的幾何不変量を多項式不変量を通して考察した.

結び目解消数とは結び目の “複雑さ” を表す量であり, 一般にその決定は難しいとされている. 論文 [1] では 結び目解消数が 1 である正結び目はツイスト結び目という明らかなものに限る ことを示した. これはすべての交点が正という性質が “複雑であること” を導いているといえる. これを得るため正結び目が複素 2 次元平面内のある代数曲線と単位球面の交わりに現れ, その 4 次元種数が正ダイアグラムから得られることを示した.

結び目の “良い位置” として最小の交点数で表された**最小ダイアグラム**が考えられ, 交代結び目ではその既約な交代ダイアグラムは常に最小であることが知られている. 論文 [2] では, この事実の正結び目版への手掛かりとして正ダイアグラムを持ち, かつ交代ダイアグラムも持つ結び目 (**正交代結び目**) を考察し, 正交代結び目の既約な交代ダイアグラムが常に正 であることを得た. よって正交代結び目の最小ダイアグラムは正なもので実現される.

最近, Stoimenow により「最小ダイアグラムとして正のものを持たない」(以下では, 性質 P とする) 正結び目が一つ発見された. 論文 [6] では, この Stoimenow の正結び目を詳細に調べ, 性質 P を与える本質的なタングルを取りだし, それを用いて 性質 P を持つ別の正結び目を構成し, またその候補の無限族を与えている.

すべての結び目は組み紐を閉じて得られ, 同じ結び目を表す組み紐の中での最小の紐の数を**組み紐指数**という. これには Morton, Franks-Williams らの HOMFLY 多項式の次数による評価 (**MFW 限界**) があり, これによってトーラス結び目や 2 橋結び目の組み紐指数は完全に決定されている. Franks-Williams は, 正の生成元の積だけで表される組み紐を閉じた閉正組み紐に対しては MFW 限界と組み紐指数が等しいという予想を立てていたが, Morton-Short によって反例が一つ示された. 論文 [5] では, 閉正組み紐では MFW 限界が 2 ならば組み紐指数も 2 になる ことを示した. また MFW 限界と組み紐指数には一般には差があることも閉正組み紐での無限個の例の構成により示した.

2. 結び目の標準的種数

結び目のダイアグラムから Seifert のアルゴリズムで得られる Seifert 曲面を**標準的曲面**という. 標準的曲面の特徴付けを行なうことは Seifert 曲面を用いた結び目補空間の構造の研究や Dehn 手術, Heegaard 分解を通した 3 次元多様体の研究に対して, 新たな視点を与えるものと考えられる. その前段階として, 論文 [4] では, 標準的曲面の中での最小種数である**標準的種数**と通常の種数に任意の差がある例を 双曲ファイバー結び目で無限個構成した. これまで知られている例が衛星型で, 連結和で差を大きくしているのに対し, この結果はより本質的であると考えられる. これにより, 曲面の標準性と結び目の双曲性, ファイバー性は関連しないことが得られる.

一般に「結び目の最小交点数とその二重化結び目の標準的種数が一致する」という予想がある. 論文 [7] では, 2 橋結び目に対してこの予想が正しい ことを論文 [4] で用いた手法を応用して示した.

ある結び目が張る曲面の一つとしてプレッツェル曲面というものがある. これは 2 枚の円板を捻ったバンドたちでこの “まっすぐ” に繋いでできるものである. この “まっすぐ” という情報を “各バンドのコアが自明な組み紐” であるとみなし，この部分を任意の組み紐に取り替えることによって，プレッツェル曲面を拡張することができる. これの曲面をブレイゼル曲面という. 論文 [8] では，任意の標準的曲面がブレイゼル曲面に変形できる ことを示した. また結び目が持つブレイゼル曲面の中での最小種数としてブレイゼル種数を定義した. これは標準的種数以下の値を持つものであるが，実際に差がある例を無限個構成した.

3. ダブルトーラス結び目の研究

論文 [3] では, 二つの結び目に対して，連結和の一般化である**バンド和**の Alexander 多項式がその二つの結び目とあるリボン結び目のそれぞれの Alexander 多項式の積になることを Seifert 行列を用いて示した.

Hill-Murasugi はあるクラスの**ダブルトーラス結び目**の Alexander 多項式の因子に 2 橋結び目の Alexander 多項式が現れることを代数的計算によって示した. 論文 [3] では，上記のバンド和に関する結果の応用として，そのダブルトーラス結び目を Alexander 多項式を変えない局所変形を用いて変形し，2 橋結び目の Alexander 多項式が因子に現れることを幾何的にとらえ, さらに Hill-Murasugi の定理の一般化を与えている. この結果及びここで定義した局所変形は, Hirasawa-Murasugi のダブルトーラス結び目のファイバー性に関する研究に応用されている.