今後の研究計画

系の隠れた対称性を明らかにし、それが明白な形で実現される幾何学的定式化を行うことで、より一般的な描像・新たな物理的側面が明らかになる、という歴史が数理物理学にはあった。絡み目理論は、Jones 不変量の発見以来、共形場理論、量子群の表現論、低次元トポロジー、可解格子模型等、広範囲にわたって、このための鍵を与えてきた。私は、これまで行ってきた超弦理論・M理論の幾何学的・代数的側面の研究成果の上にたって、量子不変量の幾何学的意味の解明を目的に、数理物理学の立場から以下の研究を行っていきたいと考えている。

Wittenは、WZW 模型の Feynmann 経路積分として、3 次元多様体の位相不変量（Witten 不変量）を定式化した。この不変量は、Reshetikhin と Turaev らにより link の Dehn surgery と Kirby calculus に基づいて、また Turaev と Viro らにより triangulation と quantum 6j-symbol に基づいて厳密に定式化された。ところが、この Witten 不変量が何を測っているのか、その幾何学的意味付けには不明な点があった。これを明らかにすることを目的に以下の研究を行いたい。

(a) 境界がある 3 次元多様体や結び目を含む 3 次元多様体に対しても、Atiyah の公理に基づく位相的場の理論を使って Witten 不変量が定式化できる。私は、共形場理論の立場から modular 変換の S 行列を使って構成された Witten 不変量を、境界や結び目がない場合の不変量と比較することで、境界や結び目といった幾何学的情報がいかに不変量に反映されるのかを調べたい。このために、Liouville 理論や H_3^+ WZW 模型の解析を足がかりに、より一般の超超対称群や商群上の WZW 模型に対して Knizhnik-Zamolodchikov 方程式のモノドロミー表現を具体的に構成し解析したい。さらにこの解析を境界や結び目を含む場合に拡張したい。また、[23,25,29] の手法を使って開いた超膜理論の境界を分類し、得られた結果と比較したい。また、河野先生による 3 次元多様体の Heegaard 分解と写像類群を使った Witten 不変量の構成は、境界や結び目といった幾何学的情報が不変量にどのように反映されるのかを調べる上で有用であると期待できる。Heegaard 分解のより深い理解は、Riemann 面の分類が弦の場の理論で重要な役割を果たしたように、膜の場の理論を構成する際に重要な役割を果たすと期待している。

(b) 超対称な位相的場の理論を使った Witten 不変量の一般化も定式化されている。特に、超対称な SL(2)/U(1) WZW 模型を調べることで、AdS/CFT 対応から期待される N=2 Liouville 理論との双対性を調べたい。また、SL(2)/U(1) WZW 模型を調べることで sin-Liouville 理論との双対関係が明らかになるのではないかと期待している。

(c) 平面波時空解上の超弦理論は、質量項があるにもかかわらず平坦時空以外ではじめて厳密に解かれた。modular 不変な分配函数は、massive テータ函数を使って構成された。そこで、この modular 変換の S 行列を使って不変量を構成することは興味深い。特に、平面波時空にはサイクルはないが、ゲージ場の flux が入っており、この flux の効果が不変量にいかに繁栄されるのかを調べたい。またこれを通じて massive テータ函数の幾何学的意味付けを明らかにしたい。

(d) Witten 不変量の摂動展開の係数は Chern-Simons 摂動理論で決まり、Vasiliev 不変量を導くことが知られている。上記 (a)-(c) について CS 摂動理論で決まる Vasiliv 不変量を調べることも有用であると考えられる。

以上を通じて、Feynmann 経路積分の厳密な定式化と、それからの不変量の組み合わせ論的導出方法の解明を追及したい。