

これまでの研究成果のまとめ

秋吉宏尚

文中では論文リストの番号で該当する論文を指します

Thurston のハーケン多様体の双曲一意化定理によると、3次元球面内のほとんど全ての結び目および絡み目の補空間は有限体積、完備双曲構造を許容する（カスプを持つ双曲多様体となる）ことがわかる。Epstein-Penner はカスプを持つ双曲多様体に対して、双曲構造から自然に定まる理想多面体分割（標準的分割と呼ぶ）を定義した。私は標準的分割を手がかりとしてカスプを持つ3次元双曲多様体の双曲構造と位相構造の関係の解明を目指して研究してきた。私のこれまでの研究を大まかに三つの系統へと分類し、それぞれの概略を述べていく。一つ目の系統は、デー手術と標準的分割との関係を調べたもの、二つ目の系統は、ヘガード分解と双曲構造との関係の解明を目指して行っている作間誠、和田昌昭、山下靖の三氏との共同研究で、三つ目の系統は無限体積双曲多様体の性質を組み合わせたにとらえようとする研究である。

デー手術と標準的分割の関係：カスプを2つ以上持つ3次元双曲多様体からデー手術により得られる、カスプを持つ3次元双曲多様体の無限族に対し標準的分割がどのように振る舞うかを研究した ((1), (2), (3), (11), (13), (18))。その結果、デー手術により得られるほとんど全ての多様体に対し、標準的分割は、ソリッドトーラスの埋め方に関してほとんど影響を受けない「安定部分」とソリッドトーラスの埋め方を決定するトーラスの写像類群の元のみから定まる「不安定部分」との和集合となることが分かった ((18) に概要、本論文は準備中)。カスプを2つ以上持つ多様体に対し、「安定部分」は、デー手術で潰すカスプに重み0を、残りのカスプに重み1を指定して構成される Epstein-Penner 型の分割を用いて決定される。さらに、残すカスプの持つ組み合わせ構造が「generic」であるという条件の下では、ほとんど全ての多様体の標準的分割が「安定部分」の細分と、ソリッドトーラスの理想四面体の層として得られる分割であるような「不安定部分」との和となることがわかった。

ヘガード分解と標準的分割の関係：作間誠、和田昌昭、山下靖の三氏との共同研究により、Jorgensen による穴あきトーラス擬フックス群のフォード基本領域に関する理論を四つ穴あき球面に適用し、さらに錐多様体の変形理論にまで拡張することで、双曲的二橋結び目（または絡み目）補空間の標準的分割を決定することが出来た ((4), (14), (17) に概要、本論文は準備中)。そして、その分割は作間-Weeks により標準的分割の候補として構成された、位相的な理想四面体分割と一致することがわかった。我々は二橋結び目の、上下トンネルと呼ばれる、結び目解消トンネルに錐角を持たせることで、四つ穴あき球面の擬フックス空間の幾何学的有限境界群から二橋結び目群への連続変形族を構成した。結び目解消トンネルは種数2のヘガード分解と密接に関係しており、この研究は「双曲的ヘガード分解理論」の構築のための第一歩と位置づけられる。

無限体積双曲多様体：Jorgensen の手法は穴あきトーラスの幾何学的無限境界群のフォード基本領域の考察にも応用でき、全ての幾何学的無限境界群に対してフォード基本領域を決定することができた。その結果として、全ての穴あきトーラス束の標準的分割を決定することができた ((15) に概要、本論文は準備中)。Lackenby はこれとは全く異なる多面体分割の組み合わせ的な議論を用いて、トーラス束の標準的分割を（独立に）決定した。このことは、双曲幾何と位相幾何が標準的分割を間に挟んできれいに対応していることの顕著な例と言えると思う。

二橋結び目補空間を構成するために無限体積双曲多様体の変形を行ったことに注意する。無限体積多様体に対する標準的分割を定義することも可能で、さらに、その分割はフォード基本領域の組み合わせ構造よりも詳しい情報を含むことがわかる (7)。この無限体積版の標準的分割を用いることで、穴あきトーラスの擬フックス空間の分割が得られることが予想され、いくつかの例に対しては計算機を用いて数値的に実証されている (8)。

McShane により得られた、双曲曲面のタイヒミュラー空間上で定値を取る級数 (McShane 級数) は、Bowditch により穴あきトーラスの擬フックス空間へと拡張された。また、Bowditch はある部分級数が円周上の穴あきトーラス束のカスプのモジュラスを表すことも示した。私は、作間誠、宮地秀樹の両氏との共同研究 (9) により、McShane 級数は穴あきトーラスの幾何学的有限境界でも絶対収束することを示し、Bowditch の定理を拡張した。また、ある部分級数は極限集合の「幅」を表すことも発見した。さらに、擬フックス空間でのこれらの結果と円周上の曲面束に対する Bowditch の結果は、一般の穴あき曲面にも拡張されることがわかった (10)。