今後の研究計画

「これまでの研究成果」の書類で述べたようにこれまで私は小さな幾何種数 p_g の一般型複素代数曲面について，ねじれ群 (Picard 群のねじれ部分) の観点を交えた研究をしてきた（研究成果の書類参照)。今後は，もうあと数年同様の方向の研究を進めて行くと同時に一般型曲面に関する他の話題に研究を広げてゆく予定である。以下代数多様体は全て複素数体 $\mathbb{C}$ 上のものとし，正則一般型曲面 X に対しその Picard 群のねじれ部分を $\mathrm{Tors}(X)$ で，第 1 Chern 数を c_1^2 で，構造層の Euler 数を χ で表す。

まず今までの続き，すなわち幾何種数 p_g の小さな一般型曲面に関する，Picard 群のねじれ部分及び基本群の観点をふまえた研究については，Noether 線に平行な直線にそって研究する。これらの不変量をもつ曲面について「研究成果」の書類で述べた問題にくわえて，「4. これらの曲面に対する Torelli 型問題」を扱う。特に $c_1^2 = 2\chi - 1$ 上の一般型極小代数曲面について以下のア，イ，ウが当面の課題である:

ア. $\chi = 2$ かつ $\mathrm{Tors}(X) \simeq \mathbb{Z}/3$ の場合の弱大域 Torelli 問題，
イ. $2 \le \chi \le 3$ かつ $\mathrm{Tors}(X) \simeq \mathbb{Z}/2$ の曲面の具体的で完全な記述，
ウ. $2 \le \chi \le 4$ かつ $\mathrm{Tors}(X) \simeq \mathbb{Z}/2$ の場合の Torelli 型問題。

幾何種数 p_g の小さな一般型曲面は，同一の数値的不変量のもとでも複数の位相構造をとり豊富な構造を持つ興味深い対象であるが，一方で様々な一般論の例外となり一般に幾何種数の十分大きな場合に比べて研究が困難である。例えば幾何種数 $p_g = 0$ または 1 の場合は標準写像がないのでその研究は特有の困難を伴い，他の場合と別の扱いが必要になる。またこれらの曲面は基本群の観点からも興味深い。単連結であって代数的単連結でない一般型曲面が存在するかは現在でも分かっていない。Xiao の定理により $c_1^2 < (8/3)(\chi - 2)$ かつ $c_1^2 < 3p_g - 13$ を満たす不正則数 $q = 0$ の一般型極小曲面は単連結である。よって Noether 線と平行な直線にそって研究する際，幾何種数の小さな曲面の基本群の計算が重要となる。また最近 K. Kato – S. Usui の仕事等，曲面の Torelli を退化を用いて調べる道具が整えられつつあるが，これらの曲面が良い実験材料になると期待している。

一方一般型曲面に関する他の話題については，まず標準写像の像が曲線になる曲面の構造を調べたい。これに関しては Beauville が初期の仕事で不変量の満たすべき不等式，(Stein factorization の) 一般ファイバーの種数の評価を与え，それに引き続いて Xiao による不正則数の評価など幾つかの論文があるが，不等式にしても最良でないものが多く，現在でも放置されたままである。また最近 Pardini が「極小複素代数曲面の Albanese 写像の像の次元が最大値 $(=2)$ をとれば $c_1^2 \ge 4\chi$」という「Severi の不等式」を証明した。この不等式の境界付近の曲面の構造を調べることにも挑戦したい。これについては Manetti の仕事等が知られている。

以上研究の背景等を交えながら，これまでの研究成果と今後の研究計画について述べてきた。ファイブレーションの局所不変量等にも興味をもっており，今後数年で研究の範囲を広げて行きたいと考えている。