これまでの研究成果のまとめ

研究内容. これまで私は複素多様体論，特に，小さな不変量の一般型曲面に関する研究を行ってきた。幾何種数 p_g の小さな一般型極小複素代数曲面を Picard 群のねじれ部分及び基本群の観点を交えて研究するのが主な興味の対象である。これらの曲面のうち不正則数 $q = 0$ のものについて，具体的に幾何種数 p_g と第 1 Chern 数 c_1^2 を指定して次のような問題を扱っている:

1. どの様なアーベル群が Picard 群のねじれ部分（以下ねじれ群と呼ぶ）として現れるか，どの様な基本群が現れるか，
2. 群 G を指定したとき，ねじれ群が G と同型であるような曲面を全て見つけること（構造定理），
3. 変形型の個数等，それらの不変量を持つ曲面のモジュライの研究。

研究の背景. この方向の研究の雛型の一つは Y. Miyaoka, M. Reid 等による数値的 Godeaux 曲面（$c_1^2 = 1$ で $p_g = q = 0$ の一般型極小曲面）の分類である。ねじれ群が第 1 整係数ホモロジー群と一致し位相構造を反映するのでその分類に際してはねじれ群を切口とし，ねじれ群がどの様な値をとり得るか，与えられたねじれ群をもつ数値的 Godeaux 曲面がどの様に具体的に記述できるか，という筋道がとられた。私の研究の動機の一つは，幾何種数の小さな他の場合にも類似の理論を展開することである。幾何種数の小さな一般型極小代数曲面は，同一の数値的不変量のもとでも複数の位相型をとる傾向を持ち，様々な一般論の例外となることからも豊富で興味深い対象である。

これまでの成果. これまで具体的には構造層の Euler 数を χ とするとき，Noether 線に平行な直線 $c_1^2 = 2\chi - 1$ 上に不変量を持つ曲面について以下の様な結果を得ている。この直線上で $\chi = 1$ の場合が数値的 Godeaux 曲面に他ならない。

1. 各 χ についてねじれ群の位数の評価を与えた（論文 [3]），
2. $\chi = 2$ でねじれ群の位数が最大値 $(= 3)$ の場合に曲面の構造を完全に決定した（構造定理）。即ちこの不変量の曲面が本質的に 4 次元射影空間内の $(3, 3)$ 型完全交差多様体を $\mathbb{Z}/3$ の特定の自由作用で割ったものであることを示した（論文 [2]），
3. $\chi = 2$ でねじれ群 $\mathbb{Z}/3$ の曲面が全て複素構造の変形で互いに移りあい可微分同相であること，粗モジュライ空間が 14 次元単有理多様体（既約）であること，ジェネラルなものについて無限小 Torelli 定理が成立することを示した（論文 [4]），
4. $2 \leq \chi \leq 4$ でねじれ群 $\mathbb{Z}/2$ となる例を実際に構成した（論文 [3]），
5. E. Stagnaro の構成したある数値的 Godeaux 曲面のねじれ群が $\mathbb{Z}/5$ であることを示し，その曲面の普遍被覆が 3 次元射影空間内の 5 次 Fermat 型曲面であることを示した（論文 [1]）。

ねじれ群の位数の評価はとり得る位相構造に制約を与えるものである。2. は近年この分野で得られた完全な構造定理としては唯一のもので，この定理から条件を満たす曲面が全て復元できる。この他，最近ねじれ群 $\mathbb{Z}/2$ のものについて，$\chi = 5, 6$ の場合の排除，$\chi = 4$ の曲面の構造定理を得た（執筆中 [5]）。