研究成果

鎌田　直子

1988 年に E. Witten が提案したコンパクト単純リー群 G を用いた 3 次元閉多様体の不変量である量子 G 不変量は, N. Yu. Reshetikhin, V. G. Turaev, R. Kirby と P. Melvin らが数学的な定義が与え, S^3 から絡み目に沿った手術で得られる 3 次元多様体の量子 PSU(2) 不変量とその絡み目のジョーンズ多項式との関係が見い出されました. H. Murakami は有理ホモロジー 3 次元球面の Casson-Walker 不変量と量子 PSU(2) 不変量との間にある種の関係があることを発見しました. 有理ホモロジー 3 次元球面ではない場合として, 論文 [1] では Z/5Z ベッチ数が正である 3 次元閉多様体に関しても同様の関係が成り立つことを証明しました.

1985 年に V. F. R. Jones によって定義されたジョーンズ多項式は, von Neumann 代数を通して定義された絡み目の不変量であり, 結び目理論において最も重要な発見の一つです. 一方, L. H. Kauffman は S^2 上の絡み目ダイアグラムの正則イソトピー不変量であるブラケット多項式をステイトモデルを利用して定義し, 絡み目の捻り数とブラケット多項式の積がジョーンズ多項式と一致することを示しました. その拡張として, 論文 [2] では有向連結閉曲面 F 上の絡み目図式に対してもブラケット多項式が定義できることを示し, 1 次元実空間 R と F との直積空間 $F \times R$ 内の絡み目に対してジョーンズ多項式を定義しました. これを利用して Kauffman-Murasugi-Thistlethwaite の定理として知られている S^3 内の交代絡み目に関する定理「2 次元球面上の連結で既約な交代絡み目ダイアグラムが同じ絡み目型を表すならばそれらの交点数は等しい」を $F \times R$ 内の絡み目に拡張しました.

1990 年代に, L. H. Kauffman によって定義された仮想結び目理論は有向閉曲面上の結び目ダイアグラム及びガウスコードに着目した結び目理論の拡張であり, 結び目ダイアグラムにおいて仮想的な交点を許すことにより定義されます. 彼は結び目の不変量であるジョーンズ多項式を仮想結び目に拡張しました. 仮想結び目は、M. Goussarov, M. Polyak, O. Viro により結び目の Vassiliev 不変量の研究に利用されています. D. S. Silver, S. G. Williams は仮想結び目の結び目群の特徴付けを与えています. 抽象結び目ダイアグラムはコンパクト有向曲面上の絡み目ダイアグラムで, そのダイアグラムが曲面の変位レトラクトとなっているものです. 論文 [3] において仮想結び目と抽象結び目との間に 1 対 1 対応が存在することを示しました. さらに仮想結び目の基本群の幾何学的な意味を与えることに成功しました. 仮想結び目のジョーンズ多項式は通常の結び目のそれとは異なった性質をもちますが, 論文 [4] においてチェッカーボード彩色可能なダイアグラムをもつ仮想結び目のジョーンズ多項式は通常の結び目と同じ性質を持つことを示しました. 論文 [5] において仮想結び目のジョーンズ多項式に関するある種のスケイン関係式を発表しました. 論文 [7] においては先のスケイン関係式を補う形で別のスケイン関係式を示しました. 論文 [6] においては, T. Kishino の発見した v-交代絡み目のジョーンズ多項式と交点数の関係式をより一般的に拡張しました. 2004 年 1 月に Y. Miyazawa は仮想結び目の不変量を導入し, この不変量がジョーンズ多項式を分割すると予想しました. 論文 [8] においてはその予想に肯定的な解答を与えました. さらにプレプリント [2] においてはこの不変量に関する 3 種類のスケイン関係式を示しました.

プレプリント [3] においては仮想結び目のジョーンズ多項式に起因するスケインモジュール (仮想マグネティックスケインモジュール) の研究を行い, そのランクを決定しさらにそのモジュールからスケイン関係式を求めることが出来ることを示しました. プレプリント [4] においては長仮想結び目のジョーンズ多項式と宮澤多項式に起因する 2 変数不変量を導入しました. その多項式不変量は積を保つ性質をもっています.

プレプリント [5] においてはコンピュータを利用して実交点が 4 交点以下の仮想結び目のテーブルを構成しました. そのテーブル内のおのおのの仮想結び目のジョーンズ多項式, 宮澤多項式, JKSS 不変量を計算しました. また, そのテーブル内の半数以上の仮想結び目の仮想交点数を決定しました.