今後の研究計画

吉田敬之氏との共同研究において p-adic period と新しい不変量 $X_p^{\sigma}(\mathfrak{c})$ との間に成り立つ関係式を予想した．この不変量は p 進部分 ζ 函数の $s=0$ での微分値を分解して定義され, p 進多重 Γ 函数を用いて書き表される．現在この理論の拡張, 証明, 応用を目指している．以下箇条書きにして説明する．

1. (p 進) 多重 Γ 函数について．多重 Γ 函数の特殊値に対してはその代数的関係式が面白い．(例えば Γ 函数の特殊値における Deligne-Koblitz-Ogus の関係式など.) これらは数論幾何的な現象と関連付けて説明できる．実際吉田予想の式を用いると CM-period の超越性と絡めた議論を行える．更に p 進でも同様の関係式が得られる．但し p 進の世界では関係式は増えている．これは (p 進) 多重 ζ 値の次元公式などにも見られる現象であり, 数論幾何的な現象と関連付けられるはずである．

2. p-adic period について．p-adic period の研究は盛んに行われているが (N. Katz, G. Faltings, A. Ogus など) 具体的な値に関するものは Coleman の Fermat 曲線に関する仕事以外あまり見られない．その中で我々の研究は具体的な値 (p 進多重 Γ 函数の特殊値) と関係付けており, p-adic period それ自体の研究にも役立つと思われる．更に具体的な p-adic period の値の記述までを目指す．

3. p-adic period, $X_p^{\sigma}(\mathfrak{c})$ に関する予想式について．既に p-ordinary と呼ばれる条件下では厳密な予想式を得ている．更に p-ordinary でない場合も含めて次の様な式が成り立つと予想する．

$$\log_p\left(p_{p,K}(\mathrm{id},\tau)^{1-\varphi_{\mathrm{cris}}^{f_{\mathfrak{p}}}}\right) \equiv -\frac{\mu(\tau)}{2}\log_p(\mathfrak{p}) + \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}_-}\frac{\chi(\tau)\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_\chi\mathfrak{p}}}\chi(\mathfrak{c})X_p^{\mathrm{id}}(\mathfrak{c})}{L(0,\chi)}. \tag{1}$$

実際 $F=\mathbf{Q}$ の場合に示すことが出来る．吉田氏のオリジナルの予想 (CM period に関するもの) と共にこの予想式の証明を目指す．完全な証明には (p-adic) period の計算方法を確立する必要があるが, これは非常に難関であると思われる．よって幾つかの間接的な検証を考えている．即ち我々の予想が成り立つと仮定すると右辺は (p-adic) period と同様の振る舞いをするはずである．(特に体 F, K の拡大, 同型写像に伴う変化など.) その現象は数論幾何の理論から定式化でき, 計算により検証することが出来る．

また純粋に代数的な考察のみで解ける場合もあるようである．我々の予想は CM 体が虚二次体かつ p-ordinary の場合は Gross-Koblitz 公式と一致している．この公式のオリジナルの証明はコホモロジーでの計算を用いたものであったが, 実は A. M. Robert 氏による p 進多重 Γ 函数の級数表示を用いた代数的な証明もある．p 進多重 Γ 函数の研究を進めることでこの証明の応用を目指す．

4. 類体の構成問題について．我々の予想式は Stark 予想やその p 進類似である Gross 予想と深い関係がある．これらの直接の結果として類体の構成が挙げられる．実際我々の予想式を仮定すると Brumer-Stark 元の構成法を与えることになり総実体 F 上の任意の類体で CM 体であるものを一定の手法で構成することが可能である．この広範囲性, 画一性は他の構成方法にはない優れた点である．また我々の理論は Brumer-Stark 予想, Gross 予想の解決にも有効であると考える．

5. (p 進)L 函数の高次微分について．吉田氏は L 函数の高次微分についても研究を進めている．私は p 進 L 函数の二階微分の公式を導き, 新谷公式とその p 進版のような類似関係が二階微分にも拡張されることを示した．更に高次微分に関しても類似性を定式化したい．一階微分を分解することで新しい不変量を定め, (p-adic) period との関係や Gross 予想の一階微分に対する部分解が得られた．同様に高次微分を分解することにより, 数論的に重要な不変量や Gross 予想に対する結果が得られると確信している．

6. 一般の p 進 L 函数及びその period について．我々の理論の他の分野における拡張を目指す．例えば $F=\mathbf{Q}$ かつ p-ordinary の条件下で, 我々の予想は trivial zero を持つ p 進 L 函数の先頭項の理論の一部だと見なせる．先行する研究としては R. Greenberg 氏や H. Hida 氏の L-invariant に関する理論がある．なおより一般には我々の不変量は彼らの L-invariant を細分した形になっている．これらの理論は p 進保型 L 函数やその p-adic period にも拡張されるべきものであると考えるのが自然であろう．特に p-ordinary でない場合への拡張を目指したい．更に L 函数の先頭項の記述や p 進 L 函数に関する研究と言う事で, 岩澤予想, 玉川数予想などに興味を持っている．より大きな枠組みの中で合わせて研究を行いたい．