これまでの研究成果のまとめ

総実体 F 上の部分 ζ 函数 $\zeta_F(s,\mathfrak{c})$ を考える. ただし $\mathfrak{c}$ は適当な法を持つイデアル類. 新谷公式に加え吉田敬之氏の研究結果を用いると, この一階微分に対し次の様な自然な分解が得られる.

$$\zeta_F'(0,\mathfrak{c}) = \sum_{\sigma\in J_F} X^\sigma(\mathfrak{c}),\ X^\sigma(\mathfrak{c}) := \sum_{j\in J}\sum_{z\in R(\mathfrak{c},j)} L\Gamma_{r(j)}(z^\sigma, v_j^\sigma) + \sum_{i\in I} a_i^\sigma \log(b_i^\sigma). \tag{1}$$

記号は J_F: F から $\mathbf{C}$ (p 進の場合は $\mathbf{C}_p$) の中への同型全体, v_j: F の総正整数を成分に持つ $r(j)$ 次のベクトル, $R(\mathfrak{c},j)$: F の有限部分集合, a_i, b_i: F の元とし, $L\Gamma_r(z,v) := \log(\frac{\Gamma_r(z,v)}{\rho_r(v)})$ は Barnes の多重 Γ 函数で古典的な Γ 函数の一般化を与えている. 吉田氏は次を予想した. $\tau \in G := \mathrm{Gal}(K/F)$ に対して

$$p_K(\mathrm{id},\tau) \equiv \pi^{-\mu(\tau)/2} \exp\left(\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}_-} \frac{\chi(\tau)\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_\chi}} \chi(\mathfrak{c}) X^{\mathrm{id}}(\mathfrak{c})}{L(0,\chi)}\right) \mod \overline{\mathbf{Q}}^\times. \tag{2}$$

これは Chowla-Selberg 公式の一般化でもある. 記号は K: CM 体で K/F がアーベル拡大となるもの, $\hat{G}_-$: G の奇指標全体, $\mathfrak{f}_\chi$: 指標 χ の法, $C_{\mathfrak{f}_\chi}$: そのイデアル類群. また $\tau = \mathrm{id}, \rho$(複素共役写像), その他に対応して $\mu(\tau) := 1, -1, 0$ と置く. 左辺の p_K は志村氏の CM-period 記号であり, K による虚数乗法を持つアーベル多様体の幾何的周期により定義される. 吉田氏は右辺を absolute CM-period と名付けた. また不変量 $X^\sigma(\mathfrak{c})$ はその定義より Stark-新谷予想との強い関わりもある. これらの研究の背景として ζ 函数の Taylor 展開における先頭項の重要性が挙げられる. 類数公式はその良い例である.

これまでの主な研究成果はこれらの研究の p 進への拡張である. まず初めに新谷公式の p 進類似について研究し次の結果を得た. p 進多重 Γ 函数 $L\Gamma_{p,r}$ を p 進多重 ζ 函数の微分値で定義し, その基本的な性質を調べた. 例えば $L\Gamma_{p,1}(z,(1)) = \log_p(\Gamma_p(z))$. ここで Γ_p は森田氏の p 進 Γ 函数. これらの性質は多重 Γ 函数の性質と類似している. (cf. $L\Gamma_1(z,(1)) = \log(\Gamma(z)) - \frac{1}{2}\log(2\pi)$.) 更に次の式を示した. 新谷公式 (1) 中と全く同じ集合, 値を用いて

$$\zeta_{p,F}'(0,\mathfrak{c}) = \sum_{\sigma\in J_F} X_p^\sigma(\mathfrak{c}),\ X_p^\sigma(\mathfrak{c}) := \sum_{j\in J}\sum_{z\in R(\mathfrak{c},j)} L\Gamma_{p,r(j)}(z^\sigma, v_j^\sigma) + \sum_{i\in I} a_i^\sigma \log_p(b_i^\sigma). \tag{3}$$

ただし $\zeta_{p,F}$ は p 進部分 ζ 函数. これは Ferrero-Greenberg 公式の一般化でもある. またこの系として p 進 L 函数の $s=0$ での位数について次を示した.

$$r(\chi) := \{\mathfrak{p}|(p),\ \chi(\mathfrak{p})=1\} \geq 2 \Rightarrow \mathrm{ord}_{s=0} L_p(s,\chi\omega) \geq 2. \tag{4}$$

但し ω は Teichmüller 指標とイデアルノルムをつなげた指標. これは Stark-Tate の結果の p 進類似である Gross 予想 (p 進 L 函数の先頭項と p-adic regulator の関係について) の部分解を与えている.

次に吉田予想 (2) の p 進類似について. これは吉田氏との共同研究となる. $p_{p,K}$ を p-adic period を CM-period 記号に習って分解したもの (値域はある巨大な環 B_{cris}) とする. $\tau \in J_K$ に対して次を示した.

$$\log_p\left(p_{p,K}(\mathrm{id},\tau)^{1-\varphi_{\mathrm{cris}}^{f_{\mathfrak{P}}}}\right) = \frac{1}{2}\log_p\left(\mathfrak{P}^{(\rho-\mathrm{id})\tau^{-1}}\right). \tag{5}$$

但し F (resp. K) に p 進位相を入れるイデアルを $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{P}$) と置き, $f_{\text{素イデアル}}$ は素イデアルの次数を表し, φ_{cris} は B_{cris} へ作用する絶対フロベニウスとした. またイデアル $\mathfrak{a}$ を単項イデアル化して $\mathfrak{a}^h = (\alpha)$ となる時 $\log_p(\mathfrak{a}) := \frac{1}{h}\log_p(\alpha)$ と定義した. 我々の一つ目の予想は次の様に定式化できる. これは Gross-Koblitz 公式の一般化を与えている. K/F で $\mathfrak{p}$ が完全分解していると仮定する. $\tau \in G$ に対し

$$\frac{1}{2}\log_p\left(\mathfrak{P}^{(\rho-\mathrm{id})\tau^{-1}}\right) \equiv -\frac{\mu(\tau)}{2}\log_p(\mathfrak{p}) + \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}_-} \frac{\chi(\tau)\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_\chi\mathfrak{p}}} \chi(\mathfrak{c}) X_p^{\mathrm{id}}(\mathfrak{c})}{L(0,\chi)} \mod \mathbf{Q}\log_p(O_F^\times). \tag{6}$$

式の右辺を p-adic absolute CM-period と名付けた. 式 (5), (6) により, 目指していた p-adic period と p-adic absolute CM-period との関係式 (吉田予想 (2) の p 進類似) を得る. なお我々はより精密な形の予想式も得ている. この予想式を仮定すると $r(\chi)=1$ の場合の Gross 予想導けることも示せた. 更に Gross 予想を"factorization"したものだとも言える.