今後の研究計画

佐藤 拓

(1) **トーリック・ファノ多様体の分類**: 滑らかなトーリック・ファノ多様体は, 現在のところ 4 次元まで分類されている. 4 次元の場合は, 双有理幾何的なテクニックを用い, 分類結果が単なる分類表にとどまらず, ある種の規則性を持っている事が示された. 5 次元以上になると, この 4 次元のときの状況は成立しない事がわかっている. ここでの目標は, 5 次元以上のトーリック・ファノ多様体についても, (分類に繋がるような) 同様の規則性を発見し, 一般のファノ多様体の研究に役立てることである. 分類は未完成であるが, 5 次元トーリック・ファノ多様体は 900 個前後存在することが知られており, トーリック・ファノ多様体全体の様子を検証, 研究するには, コンピューターの使用が不可欠である.

(2) **アーベル曲面の埋め込み問題**: アーベル曲面を 124 個の 4 次元の滑らかなトーリック・ファノ多様体に埋め込めるか否かを判定し, 可能であれば埋め込みを実現する, という問題である. 非常に特殊な状況であるが, 4 次元射影空間の場合を考えた Mumford を筆頭として, 数多くの研究がある. 現状としては, 124 個のうち 100 個余りについては判定が出来ている. 残りのものについては, 更に複雑な計算が必要になるが, 数式処理ソフトのマッコーレー等を使い, トーリック多様体のチャウ環を計算させる等して, 研究が進められている.

(3) **反標準因子がネフとなる 4 次元トーリック射の分類**: 3 次元の場合の研究の続きである. この問題には少なくとも二つの意味がある. まず一つ目は, 4 次元トーリック弱ファノ多様体への応用である. 局所的に分類しておいて, 大域化した場合の研究に役立てる目的である. 二つ目は, 3 次元超曲面特異点への応用である. 反標準因子がネフとなる 4 次元トーリック射は, 3 次元超曲面特異点, 特に標準特異点と関係している. 次元を一つ落とした場合には, 所謂 ADE 特異点に対応する訳だが, ADE 特異点の重要性を考えると, 3 次元超曲面標準特異点を研究する事には大変な意味があると思われる. 4 次元という目に見えない対象を分類する訳であるから, トーリック森理論をフルに使用したり, 代数的な手法に還元させるテクニックが必要である.

また, 3 次元の場合について, ADE 特異点と対応している, と述べたが, D 型については D_6 型までしか現れない. D_7 型以降は何処へ行ってしまったのか? という疑問に理由を与える事も問題として残っている.

(4) **coindex によるトーリック・ファノ多様体, トーリック多様体の分類** : Coindex が 5 までの非特異トーリック・ファノ多様体は完全に分類されている. 次の目標は coindex 6 の非特異トーリック・ファノ多様体の分類を完成させることであるが, 端射線のタイプもわかっており, トーリック森理論をフルに使うことにより, 近々完成出来るのではないかと思われる. 一方, coindex が 2 までの非特異完備トーリック多様体は服部・枡田によって分類されている. 先と同様に, coindex 3 の非特異完備トーリック多様体はどうなるか, と考えるのは自然の成り行きであるが, 当然有限では無いので, 分類は困難なものになると考えられる. しかし, coindex 1, 2 の非特異射影的トーリック多様体の分類は比較的簡単であることから, 森理論が使える状況であれば, 分類の完成はそう遠くないと思われる.