今後の研究計画

田中利史

低次元トポロジーの研究において，代数的手法を用いて多様体の幾何的性質を特徴付けることは基本的かつ非常に重要な問題である．今後の研究においては次の二つを目標とする．

目標１　Khovanov 理論を用い 4 次元多様体の幾何構造を調べる

1984 年の論文において V. F. R. Jones は von Neumann 代数を通して，現在 Jones 多項式とよばれている結び目の重要な多項式不変量を与えた．一方，L. H. Kauffman は結び目・絡み目図式を組み合わせ的にみることで，Jones 多項式と一致する不変量を構成した．その後 2000 年の論文において M. Khovanov により Kauffman の構成は一般化され，結び目・絡み目図式より 2 次元の位相的場の理論をもちいて組み合わせ的にコホモロジーが構成され，次数つきオイラー標数が Jones 多項式に一致する絡み目の不変量が与えられた．E. S. Lee は，この Khovanov の構成の位相的場の理論の部分に修正を加え，比較的扱いやすいコホモロジーを再構成した．さらに J. Rasmussen は Lee の位相的場の理論の性質を調べることで，Lee のコホモロジーから有効な結び目のコボルディズム不変量を構成することに成功した．実際，Rasmussen はその不変量を用いることでトーラス結び目の結び目解消数（結び目をほどくための交差交換の最小数）を決定した，すなわち彼は Milnor 予想の組み合わせ的な解法をあたえた．この Rasmussen のコボルディズム不変量を通して 4 次元多様体の幾何構造の研究を進めることが私の研究目標の一つである．実際，Rasmussen 不変量をもちいエキゾチックな 4 次元空間の存在を示すことができる．これは 4 次元多様体のエキゾチック性の証明が位相的に与えられることを示しており，従来ゲージ理論を通してのみ示されてきたことを考えると驚くべきことである．私はこれまでの研究において Rasmussen 不変量をもちいて特別な Casson ハンドルのエキゾチック性を示すことができている．Casson ハンドルのエキゾチック性はある種の結び目のスライス性（すなわち結び目が 4 次元空間のなかの円板の境界になるという性質）に置き換え考えることができる．私はさらにその研究を進めることで,数多くの Casson ハンドルや他の 4 次元多様体のエキゾチック性を示すことができることを期待している．また一方では Rasmussen 不変量とその他の結び目コボルディズム不変量との関係を調べることで，不変量の特徴づけを行いたいと思っている．

目標２　量子不変量どのような幾何的性質を反映するかを明らかにする

結び目の色付き Jones 多項式と補空間の単体的体積（Gromov 不変量）との関係を表している体積予想は，量子不変量が多様体の幾何的構造と深く関係することを示唆している．例えば 8 の字結び目に関してはその色付き Jones 多項式のある種の極限としてその補空間の双曲体積が得られることが分かっている．私はこの予想を通して Jones 多項式と 3 次元多様体の幾何構造との関係を調べていきたいと思っている．体積予想にする研究において私は既に 2 重化結び目に対し色付き Jones 多項式の簡潔な公式を得ており，その帰結として体積予想が 2 重化結び目に対して正しければ色付き Jones 多項式が自明な結び目を決定するという結果を得ている．したがって特に私はこの 2 重化結び目に対し研究を進めていきたいと思っている．また，一方では stoimenow により 15 交点以下の結び目の反例の候補のリストが与えられており，そのなかの結び目についても調べていきたいと思う．