研究計画

水摩　陽子

『研究成果』で述べた研究に引き続き，結び目コボルディズム群やその単位元としてのスライス・リボン結び目，および結び目のコボルディズム不変量を研究の対象とする．

これらの研究の面白さは，4 次元トポロジーが本質的に絡んでくる点にあるだろう．その端的な例として，近年盛んに研究されるようになった位相的スライス結び目（スライス結び目の定義から可微分性を除いたもの）がある．1982 年，Freedman は自明な結び目と Alexander 多項式が等しい結び目は位相的スライス結び目であることを示した．2004 年，Rasmussen は後述の Khovanov ホモロジーからコボルディズム不変量（コボルダントで保存される量）を構成し，これを用いて位相的スライス結び目だがスライス結び目でない結び目の存在を示した．これは，4 次元空間における位相的現象と可微分的現象の差を結び目コボルディズム不変量が明らかにした，画期的な結果と言えるだろう．また，スライス・リボン問題が肯定的，すなわちスライス結び目がリボン結び目であれば，これは，位相的スライス円板に可微分性を加えればリボン円板による 3 次元的な特徴付けが可能になる，と主張しているようにも見える．一般に R^4 へのコンパクトな曲面の埋め込み X を考えた場合，X の $R^3\times\{t\}$ による切り口を考え，結び目（絡み目）の時間発展と見るのが分かりやすい．このとき，切り口にスライス結び目が現れればその時間近傍での X の形状はシリンダーになることが知られており，このようなスライス結び目の性質は 4 次元空間内の曲面のトポロジーを知る上で非常に基本的な役割を果たすはずである．したがってスライス結び目を特定することは，4 次元結び目理論（S^2 の S^4 への埋め込み理論）を始め，4 次元トポロジーにおける課題の一つであり，また裏を返せば，3 次元と 4 次元の本質的な違いが内在する難題の可能性がある．

スライス結び目の決定に向けたアプローチとして，コボルディズム不変量による方法がある．より強力なコボルディズム不変量を見つければ，結び目のスライス性を判定する篩いの目はより細かくなる．このような研究は最近活発に行われているが，既知のコボルディズム不変量を重ね合わせても篩い落とされない結び目が数多く存在する．そこで私は現実的なアプローチとして，3 次元的に明解であるリボン結び目を特定し，リボンではないがスライスの可能性は残る，というグレーゾーンの結び目の特徴を調べることで，スライス性およびリボン性の本質を探る，という方法を取っている．最近，Jones 多項式と Alexander 多項式をホモロジー不変量として拡張する試みの中から，二つの新しいコボルディズム不変量が得られた．1999 年に Khovanov が定義した Khovanov ホモロジーは，結び目 K に対し Euler 標数が K の Jones 多項式になるような線型空間の複体を考える．このホモロジー群が結び目の Khovanov 不変量である．上述のように，Rasmussen はこのホモロジーからコボルディズム不変量を導出した．一方これと同時期に，Ozsvath と Szabo はゲージ理論を用いて結び目 Floer ホモロジーを定義した．こちらも同様の複体を考えるが，その Euler 標数は K の Alexander 多項式である．特に顕著な特徴として，Khovanov 不変量がミューテーションで不変なのに対し,Floer ホモロジー群はミューテーションで変化することが,最近 K-T 結び目と Conway 結び目（K-T 結び目にミューテーションを施すことで得られる結び目）の例をもって証明された．しかし彼らがこのホモロジーから導出したコボルディズム不変量では，やはりミューテーションに対し無反応になってしまう．これらのホモロジー研究は凄まじい勢いで進んでおり，さまざまな幾何学的な情報を含むことが示唆されてはいるが，例えば Floer ホモロジーのミューテーション変性については上述の例が分かっているだけで，一般的な性質は知られていない．一方で,『研究成果』で述べたグレーゾーンにある結び目は，ミューテーションを含む結び目の変形操作と深く関係していることが最近分かった．そこでまず，これらホモロジー不変量が結び目の変形操作にどのように反応するか詳細を調べた上で，新しい mutation-sensitive なコボルディズム不変量の構成を目指したい．