研究成果

水摩　陽子

1960 年代，Fox と Milnor はコボルディズム理論の観点から結び目の間にコボルダントという同値関係を導入し，結び目の集合に群構造を入れることに成功した（結び目コボルディズム群）．同値関係コボルダントは 4 次元可微分トポロジー的に定義されるため，3 次元的直感を超えた難解さを伴う．例えば，結び目コボルディズム群の単位元になる結び目の族（スライス結び目と呼ばれる族）を結び目の集合から特定するという基本問題ですら未解決なのである．この問題に対するアプローチとして，Fox はスライス結び目の族に含まれ，かつ 3 次元的直感の働くリボン結び目という族を考えた．実際，現在までに得られているスライス結び目は全てリボン結び目であるが，この二つの族が一致するか，というスライス・リボン問題は 40 年来未解決である（Kirby の問題集の Problem1.33)．私はこのスライス・リボン問題に興味を持ち，リボン結び目とそれに関連する 3 次元多様体の性質について，主に不変量の観点から研究を行ってきた．

リボン数の研究（論文リスト[5,6,8]）：Fox と Milnor は，スライス結び目の Alexander 多項式はある整係数多項式 f を用いて f(t)f(1/t)と書ける極めて特殊な形になることを示した．このように結び目のスライス性もしくはリボン性を不変量の形により特定する方法は有効である．そこで，さらに強力な不変量である Jones 多項式を用いてリボン結び目の特徴付けを行った．そしてこの結果を用いて，リボン結び目の不変量であるリボン数の下からの評価を行った．リボン数はリボン結び目の複雑さを測る量として，リボン円板が持ちうる ribbon singularity の個数の最小値として定義される．この量は直感的には明快だが，円板の張り方にはイソトピー分の自由度が発生し一意的でないため，その決定は難しい．例えば，単純なリボン結び目の例である K-T（Kinoshita-Terasaka）結び目のリボン数さえ決定されていなかった．しかし上述の評価が有効に働き，K-T 結び目を含むあるクラスのリボン結び目に対してリボン数を決定することに成功した．さらに，結び目の幾何学的不変量の一つであるクロスキャップ数とリボン数の関係付けを行った．任意の結び目には連結かつコンパクトな曲面 S を張ることができ，そのような全ての S に対する 1 次元 Betti 数の最小値は結び目の不変量となる．特に，S を向き付け可能なものに限った場合は種数，不可能なものに限った場合はクロスキャップ数と呼ばれる．例えば，Jones 多項式が区別できない結び目も種数により区別できることがあり（Gabai，1986 年），その決定は容易ではないが貴重な不変量と言える．この研究の過程で，クロスキャップ数も種数と同様，Jones 多項式が区別できない結び目を区別する可能性があることを示した．

リボン結び目で分岐する 2 重分岐被覆空間の研究（論文リスト[7]）：S^3内の結び目Kで分岐する 2 重分岐被覆空間とは，S^3から 2 重分岐被覆される空間でKを分岐点の集合として持つものである．1970 年代，Montesinosはリボン結び目のあるクラスで分岐する 2 重分岐被覆空間がMazur多様体の境界として現れる整係数ホモロジー球面になることを示した．一方，整係数ホモロジー球面の整数値不変量として重要なものにCasson不変量がある．一般に，リボン結び目で分岐する 2 重分岐被覆空間のCasson不変量は偶数となることが知られているが，その値域は特定されていなかった．そこで，Mullinsが 1993 年に与えたCasson不変量とJones多項式の間の明示的公式に上述の結果を応用し，任意の偶数に対してその値をCasson不変量に持つ，リボン結び目で分岐する 2 重分岐被覆空間を具体的に構成した．

リボン結び目の判定法の研究（論文リスト[9]）：現在，最小交点数 16 までの素な結び目表が完成しており，その中からリボン（スライス）結び目を特定することは結び目コボルディズム群の研究で非常に現実的な問題と言える．そこで，リボン結び目の判定プログラムを作成した．このプログラムを用いて，11 交点以下までの素な結び目表からスライス・リボン問題の反例候補となる結び目を抽出した．さらに，これらの結び目からこのプログラムの精度を上げるための条件を導出した．