今後の研究計画

ここでは、四元数離散系列表現を生成する $Sp(1,q)$ 上の保型形式に絞って、今後の研究計画の説明を与える。具体的には以下の 2 つのテーマを考えている。

1. $Sp(1,q)$ の場合で示したケッヒャー原理の一般の四元数離散系列表現への拡張。
2. $Sp(1,1)$ 上の保型形式のフーリエ係数の数論的研究。

まず、最初の研究テーマに関して説明する。ベネディクト-グロスとノーラン-ワラックによって導入された四元数離散系列表現というのは、非正則離散系列表現の中で正則離散系列表現 (これは保型形式のレベルでは正則保型形式と対応) に振る舞いが似ているという点で特徴的である。そしてこの離散系列表現は $Sp(1,q)$ の他にも古典群の場合は、符号 $(4+,q-)$ の直交群と $(2+,q-)$ のユニタリー群に対して存在し、そして多くの例外型リー群にも存在する。わたくしは $Sp(1,q)$ の場合で示したケッヒャー原理が、一般の四元数離散系列表現の場合に拡張できないかと考えている。これは、上で述べた四元数離散系列表現と正則離散系列表現の類似性から、自然な期待であると考えている。今は手始めに古典群の場合で各場合毎に調べている。将来的には四元数離散系列表現一般に通用する統一的な議論を見つけて、それによりケッヒャー原理の研究を進めたいと考えている。

次に後者のフーリエ係数の数論的研究であるが、一般に保型形式から数論的情報を取り出すという問題意識を持ったとき、保型形式のフーリエ展開の展開係数、即ちフーリエ係数に専門家はしばしば注目する。実際、戦前戦後辺りのジーゲルによるジーゲル上半空間上のテータ級数のフーリエ係数を用いた 2 次形式論の研究から、保型形式のフーリエ係数は数論の研究対象として本格的に注目され始めた。そしてその後は、フーリエ係数が代数体の類数やある数論的多様体の代数的サイクルの交点数等の数論的不変量を数えている保型形式が見つかったりなどして、ますますフーリエ係数の数論的意義が注目されるようになり現在でもその興味は尽きることがない。

しかし、これらは主に複素解析的な保型形式に対して得られた結果であり、すると次の問題意識として、複素解析的でない保型形式についてそのフーリエ係数の数論的性質を調べるということが自然に出てくる。わたくしはまず $Sp(1,1)$ の場合で、四元数離散系列表現を生成する保型形式を含めて、フーリエ係数の数論的意義を調べたいと考えている。「これまでの研究成果」の最後で説明した、テータリフトのフーリエ係数の研究はその一環である (これについてはフーリエ係数と L 関数との具体的関係を探ることも研究目標となろう)。

この研究を更に進めるための一つの方向性として、保型形式の例をなるべく沢山構成したいと考えている。わたくしは $Sp(1,1)$(もっと一般に $Sp(1,q)$) 上で四元数離散系列表現を生成する保型形式について、テータリフトによる構成の他にも、アイゼンシュタイン級数やポアンカレ級数による構成を与えたが、これだけでは不十分であるように思える。これらの 3 つは保型形式の構成方法でも標準的な部類のものであるが、これにこだわらない構成方法を探る必要があろう。例えば符号 $(2+,2-)$ のユニタリー群や符号 $(2+,2-)$ の四元数ユニタリー群のような $Sp(1,1)$ を含む大きな群上の保型形式を $Sp(1,1)$ に制限したものを調べるなどがあると思う。そして具体的に得られた保型形式からフーリエ係数の例を沢山与えることにより、$Sp(1,1)$ 上の保型形式の数論的意義を探るという計画である。

正則保型形式のような複素解析構造が入る対称領域上の保型形式の数論的研究がうまくいっていることの背景にあるもののうち、一番大きいのはそのような対称領域の数論的不連続群による商多様体 (局所対称領域) が「正準模型」と呼ばれる数論幾何学的な模型、つまり代数体やその整数環などのような整数論的な環の上で定義された代数幾何学的模型が存在することが効いている。しかし $Sp(1,1)$ の場合は、この正準模型の理論がない。わたくしはこの保型形式のフーリエ係数の研究は、正準模型のない世界で保型形式の数論的研究がどのくらいできるかを探るという意味で、面白いテーマであると考えている。