

これまでの研究成果のまとめ

わたくしの専門は整数論であり、中でも保型形式論を研究している。保型形式の最も古典的な例は楕円保型形式であり、これは複素上半平面上の正則関数で実2次特殊線形群 $SL_2(\mathbb{R})$ の数論的部分群に関する「保型性」という豊富な対称性を持つものとして定義される。現在は様々な一般化された保型形式が研究されているが、保型形式は半単純リー群上の関数とも見做しえて(例えば楕円保型形式は $SL_2(\mathbb{R})$ 上の関数とも見做せる)表現論の立場からもしばしば考察される。現在の整数論は保型形式論の他にも、数論的代数幾何学、代数的整数論そして解析数論など、様々な分野に枝分かれしつつも、それらが互いに影響を及ぼし合いつつ発展している。実際このような多様な分野の相互作用は整数論に大きな成果をもたらした。前世紀末に解決したフェルマーの最終定理や最近の佐藤-テイト予想の大幅な解決などがその最たる例と言えよう。このような整数論の大きな成果において、保型形式はしばしば重要な役割を果たしてきた。保型形式論は整数論においてそれ自身の興味から研究されているのはもちろん、整数論の他分野にも強力な道具を提供し続けている。

わたくしの研究テーマは、大局的には、これまで主に調べられてきた正則保型形式の研究を更に深めることに寄与すると同時に、保型形式の研究領域を非正則保型形式の場合に広げることを試みることである。この問題意識の下、私はこれまで以下の研究をしてきた。

1. 正則ジークル保型形式及びその一般化である管型領域上の正則保型形式の極小放物型部分群に関するフーリエ展開(論文リスト5、6、7、その他の参考文献5、6、7)。
2. 符号 $(1+, q-)$ の四元数ユニタリー群 $Sp(1, q)$ 上の「四元数離散系列表現」を生成する実解析的保型形式のフーリエ展開、保型形式の具体的構成、L関数やフーリエ係数などの数論的研究(論文リスト1、2、3、4、その他の参考文献1、2、3)。

現在は2番目のテーマを主に研究している。この四元数ユニタリー群 $Sp(1, q)$ 上の保型形式は、 $Sp(1, q)$ に対応するリーマン対称空間である四元数双曲空間上の実解析的保型形式とも見做せる。この保型形式の興味深いところは、その非正則性にも関わらず、正則保型形式と振る舞いがよく似ているという点にある。実際わたくしはこの保型形式が $(q > 1)$ のとき自動的に緩増加条件を満たすという「ケッヒャー原理」と言うべき性質を満たすことが証明できた。これは多変数の正則保型形式についてこれまで知られてきたことであり、多変数複素関数論でいうところの「ハルトークスの接続定理」の保型形式版と見做し得る。つまりこの $Sp(1, q)$ 上の保型形式は、四元数双曲空間という複素構造が入らない多様体の上でハルトークス定理の類似を満たす例を与えていると言えるのである。またこの保型形式の正則形式との類似性は、それが非正則保型形式の中でも比較的扱い易い対象であることを示唆している。一般に非正則保型形式の研究は、複素関数論が使えないなどの厳しい制約の下、非常に難しいものになるのだが、この保型形式の研究は保型形式の研究領域を非正則の場合に広げる一つの出発点を与えるのではと考えている。一方、四元数双曲空間またはそれに関連する詳しい研究は双曲幾何学の観点からも興味の対象となるであろう。このような背景からこの保型形式の研究の将来的意義を探ることも面白いと思う。

最後に、最近京都産業大学の村瀬篤氏との共同研究により、この保型形式の $Sp(1, 1)$ の場合の数論的研究に更なる進展があったことを述べる。具体的には楕円保型形式と四元数環上の保型形式から「テータリフト」と呼ばれる操作で作られる保型形式について、そのフーリエ展開の明示公式を得ることができた。より具体的には、我々はそのフーリエ係数を持ち上げられる2つの保型形式の「トラス積分」を用いて表示する公式を得た(論文リスト1)。このトラス積分は保型L関数と関連することが期待され、このフーリエ係数の数論的性質を反映するものと考えられる。