

## 研究計画

今後の研究とする問題の選択は、もちろん共同研究者との関係により、今から十分正確に指定することはできない。以下の具体的なテーマは現在興味があり、今後に予定される研究の例である。

### 双曲体積と twist 数

最近、「Jones」型の結び目不変量 (Jones 多項式とその Khovanov ホモロジーや colored Jones 多項式などの量子的な一般化) と、双曲絡み目の補空間の双曲体積との様々な関係が、予想されたり、解析されたり、部分的に証明されたりした。一例は村上順と村上斉による「双曲体積予想」である。ほかに、Brittenham によって観察された標準的種数による双曲体積の評価がある。Brittenham の評価は Lackenby-Agol-Thurston の「twist 数」という不変量を使う不等式を用いて改良することができる。その評価は Dunfield による、交代絡み目に関する「行列式不変量の対数は双曲体積で直線的に近似される」という予想と関連する。この評価とそれぞれの関連する事項の解析と改良は私の目標の一つである。

### 種数による交代結び目の組み合わせと 3-valent graph

Brittenham による双曲体積の近似を用いて、指定された Euler 標数を持つ交代絡み目の最大の双曲体積を計算することができる。この最大体積は、同じ Euler 標数の planar (平面に埋め込みを許容する) 3-valent graph  $G$  に対する葉廣のクラスパーに似ているある双曲絡み目  $L_G$  の最大の双曲体積と一致する。一方、その絡み目の双曲体積は Euler 標数の交代結び目の交点数による個数の漸近挙動と共同研究者の A. Vdovina による有向曲面の vertex を一つ持つ三角形分割の組み合わせとも関連がある。この組み合わせの解説を踏まえて、結び目の個数の評価を改良することを目指す。

### ウェイト系双曲体積予想

更に、バシリエフ (有限型) 不変量の理論に現れる Lie 環  $sl_N$  のウェイト系と前述の絡み目  $L_G$  の双曲体積との関係の予想に興味がある。色々な計算で現れた現象が示唆するところによると、 $G$  のウェイト系は  $L_G$  の体積を具体的に決定すると思われる。ウェイト系と双曲体積は元に離れる姿の概念であるから、このような関係は不思議に現れる。将来に自分の双曲体積と、具体的にその関連についての知識を深め、できれば村上一村上の双曲体積予想との関連が明らかになることも期待している。

### 不変量の数論的な性質

結び目の他に初等数論的な不変量の性質を研究できれば、私は興味がある。結び目解消数 1 などの特別な性質を持つ achiral な (鏡像に変形できる) 結び目の行列式不変量の性質はうまくゆく問題の一つであろう。その行列式不変量の値は二つの平方数の和で、そのなかで条件によってどの数を実現されるかを知りたい。そういった性質は解消数と結び目距離に関連があり、その方向の応用があることが期待される。

### 非自明な Jones 多項式の問題

非自明な Jones 多項式の問題について、樹木形 (arborescent) の絡み目などへの一般化をめざし、その過程で用いた手段により、15 以上の奇数交点数での achiral な結び目の構成や、最小交点正ダイアグラムでない正結び目の無限族の構成 (中村による問題) や、その他の応用を得る事を目指す。

その他に、Jones 多項式は Jones-Oceanu の方法により組み紐群の表現のトレースの和として定義され、多項式の非自明性は Hecke 代数にも関係がある。この表現の中に Burau 表現が現れる。Burau 表現は本

数 3 の組み紐に対して忠実であることが以前から知られている一方、本数 5 以上に対する表現の非忠実性は比較的最近に Bigelow により示された。それで、本数 4 の場合だけが未解決である。この問題は 4 次組み紐の閉包の中に自明な Jones 多項式を持つものが存在するかどうかという問題と同値である。この組み紐群との関係をふまえて、Bourbaki 表現への応用についても考えている。(例えば、3 次組み紐群の Bourbaki 表現の忠実性は私による Jones 多項式の非自明性へのアプローチから示すこともできる。)

## その他

組み紐についての問題にも取り組むつもりであり、例えば、Rudolph による (強) 準正 (quasipositive) 結び目が全て最小の指数に (強く) 準正表示を許容するかどうかを問う問題を考える。(平澤との共同研究により、その問題を弱めた問題に対して最小の指数と最小の種数を同時に実現する組み紐表示でない結び目の例を見つけたが、元の問題に対しては否定的な解決を予想しているが、実際、反例を見つける事は困難であると思われる。)

ガウスダイアグラム和不等式に関する既知の手法を改良したり、拡張したりすることにより、さらに進んで、それらを正結び目と概正結び目に应用することをめざす。