# 研究成果

これまでの私の主な興味は、結び目のダイアグラム（図式）とその不変量を解析すること、および結び目の性質を研究することである。そのために、組み合わせ論、数論、代数、幾何などの様々な手段を用いる。以下ではこれまでにとりくんできた研究テーマについて述べ、主な結果とそれらを解説する論文 (プレプリントを含まず、出版を出版予定のものだけ、「論文リスト」を参照) の内容を概説する。

## バシリエフ（有限型）不変量

初めての研究成果として、私は [St3] において、結び目の次数 $D$ のバシリエフ不変量の次元の上からの評価 $D!/C^D$ を得た。ここに $C$ はある定数で、当時は $C > 1.1$ しか証明できなかったが、その後、ザギアー [Za] は正しい値 $C = \pi^2/6$ を決定した。他の結果は、指定された有限次数のバシリエフ不変量を持つ結び目の中で、指定された４次元種数や解消数を持つものの実現 [St24] や、特別な性質を持つ結び目の構成である。また、Conway/Alexander 多項式以外には、任意の有限集合の多項式係数による非自明なバシリエフ不変量が存在しないことが証明できた。

## ルジャンドル結び目

３次元ユークリッド空間の標準接触構造にそって埋め込まれた結び目はルジャンドル結び目といい、ルジャンドル結び目の Thurston-Bennequin 不変量と回転数と基本的な位相的結び目の多項式不変量次数の間にはある不等式が成り立つ。その不等式と多項式次数の評価を用いることにより、負結び目と概負結び目のルジャンドル埋め込みの不変量を評価した [St29]。（負結び目は以下に説明する正結び目の鏡像である。）それは神田が負 trefoil の極大 Thurston-Bennequin 不変量を決定した結果の拡張と見なすことができる。

## ガウスダイアグラム和公式

Fiedler と Polyak-Viro はバシリエフ不変量の新たな表示として、低次数バシリエフ不変量のガウスダイアグラム和公式を発見した。その公式は正結び目の研究に有効である。（正の交点しか持たない有向ダイアグラムを正ダイアグラムと言い、そのようなダイアグラムを許容する結び目を正結び目と言う。）正結び目は、純粋な結び目理論的興味以外にも、 力学系、特異点、代数曲線の理論、４次元 QFT 等に関連する重要な結び目クラスである。そのガウスダイアグラム和公式を用い、正結び目の低次数バシリエフ不変量に関する不等式を与え、ある結び目は正結び目ではないことを示した [St26]。その後、私は概正結び目に対する条件の一般化を調べた [St29]。

## 結び目の標準的種数

結び目を境界として持つ compact な有向曲面は Seifert 曲面と呼ばれる。Seifert 曲面は結び目の各ダイアグラムから Seifert のアルゴリズムによって得られる。そのようにして構成した曲面は標準的な Seifert 曲面と呼ばれ、その種数はダイアグラムの標準的種数と呼ばれる。Seifert 曲面の最小種数を結び目の種数と定義し、また、ダイアグラムの標準的種数の最小値を標準的種数と定義する。一般に、標準的種数と種数の差が任意に大きくなるような結び目が存在するが、交代結び目や正結び目などの多くの結び目の場合には両者は一致する。同じ標準的種数をもつ結び目のダイアグラムの集合にある種の生成構造を定め、生成元を決定すると、その集合を完全に分類することができる [St18]。応用として、同じ（標準的）種数の交代結び目の個数は交点数によって多項式的に増加することを私は証明した [STV, SV]。

## 非自明な Jones 多項式の問題

1985 年に Jones は、彼の名に因んで呼ばれる結び目多項式不変量を発見し、その多項式は自明な結び目を各非自明な結び目から区別できるかどうかという問題を提起した。最近、2 以上の成分 (component) を持つ絡み目に対する非自明性の問題は否定的に解決されたが、Jones の元の（結び目についての）問題への答えは不明である。Jones 多項式より古典的な多項式不変量である Alexander 多項式については、Alexander 多項式が自明な値をとる非自明な結び目が存在することが知られている。同じように、自明な Jones 多項式をもつ結び目を構成することができれば、Jones 多項式の幾何学的特徴づけという基本的な問題への答えに近づける事が期待される。

Jones 多項式の Kauffman 括弧式のモデルを詳しく解析することにより、従来から知られていた交代絡み目と正絡み目の条件の一般化として、Lickorish-Thistlethwaite により定義された semiadequate 絡み目の Jones 多項式の非自明性を証明した。そして、閉じた 3 次組み紐絡み目と Montesinos 絡み目が semiadequate 性を持つことを示すとともに、それらのクラスの絡み目に対して Jones 多項式の非自明性を示すことができた。

## 閉じた 3 次組み紐絡み目

私は交代性 [St28] や閉じた正組み紐やファイバー性などの特別な性質を持つ閉じた 3 次組み紐の結び目と絡み目を分類し、閉じた 3 次組み紐に対して Jones 多項式は非自明である事を示した。この非自明な Jones 多項式の問題への貢献の他に、指定された Conway/Alexander や Jones や HOMFLY [St28] 多項式を持つ結び目を決定する方法を示した。 さらに、私は、最近、平澤美可三と石渡万希子との共同研究で Birman-Menasco と Bennequin による結果を一般化し、各閉じた 3 次組み紐絡み目は非圧縮曲面を一つしか持たないことを証明した。

## 結び目の表

Hoste-Thistlethwaite-Weeks により編集された結び目の表を用いて、特別な性質を持つ結び目を見つけたり、長い間手作業ではアプローチできなかった問題に対して例や反例を見つけた [St16, St22, St41]。さらに、自分で計算と手作業を合わせて種数や fiber 性や組み紐指数の不変量の表を作成する。

## その他

解消数 [St30, St27]、結び目不変量の数論的な性質 [St33, St10]、および結び目の数量決定問題 [St32] についても研究を行なった。