これまでの研究成果のまとめ

田中利史

私の研究分野は幾何学的トポロジーであり，特に「結び目理論」及び「4 次元多様体論」を用いた低次元多様体の研究を行っている．結び目理論とは 3 次元空間の中にある，単純閉曲線の結び目や絡みの理論であり，さまざまな視点からの研究があるが，私の研究においては幾何学的トポロジーの一分野と捉えている．一方，4 次元多様体論とは 4 次元多様体の幾何学的性質を調べるための理論であると考えると，それは結び目理論と深い関わりがある．以下，これまでの研究について述べる．

1．1996 年〜1999 年

擬正結び目の性質を調べることにより，結び目コボルディズムの研究を行った．とくに擬正結び目が，結び目コボルディズムに関する重要な性質を数多くの持っていることを示し，4 次元種数と位相的 4 次元種数の差がいくらでも大な一次独立である結び目の無限族の存在を示した．また 3 次元空間の接触構造を通して定義される結び目・絡み目の不変量である極大 Thurston-Bennequin 数と，多項式不変量との関係を調べることで，正結び目・正絡み目に対する Kauffman 多項式と極大 Thurston-Bennequin 数との間の関係式を得ることができた．また, 私はさらにその結果を交代絡み目に拡張した.

2．1999 年〜2002 年

結び目の対称和の Jones 多項式の性質を調べることで，1991 年に与えられた Jones 多項式と結び目の 4 次元種数に関する T. Fiedler の予想の反例を与えた．さらにその研究を発展させることで，結び目の対称和に付随した 2 次元結び目（4 次元空間の中の球面）に関する特徴づけを行うことができた.

3．2002 年〜2003 年

結び目補空間の基本群の線形表現に関する研究を行った．結び目群の $SL(2,C)$ 表現より定義される不変量として A 多項式がある．自明な A 多項式を与える結び目は自明な結び目かという問題が D. Cooper と D. Long の論文において与えられていた．この問題は Alexander 多項式が自明なサテライト結び目の場合以外は肯定的に解かれていたが, 私はアレキサンダー多項式が自明なサテライト結び目で A 多項式が非自明な素な結び目の無限族の存在を与えた.

4．2003 年〜2004 年

絡み目の色付き Jones 多項式に関する研究を行った．色付き Jones 多項式の公式を与えることはそれが Kashaev-村上-村上体積予想の研究の進展につながるため重要となってきている．私はスケイン理論を用いて 2 重化結び目の色付き Jones 多項式の公式を得た．これは，G. Masbaum による ツイスト結び目に対する公式の一般化となっている．またその結果として，もし体積予想が 2 重化結び目に対して正しければ色付き Jones 多項式は自明な結び目を決定する事ができることを示した.

5．2004 年〜2005 年

有限型不変量の研究において重要な概念であるクラスパーと結び目コボルディズムとの関係についての研究を行った. 私は各連結成分の 1 次元 Betti 数が正であるグラフクラスパーに対して，そのようなクラスパーにより移りあう結び目の間にリボンコンコーダンスが構成できることを示した.

6．2005 年〜2006 年

E. Ferrand により与えられた結び目・絡み目の HOMFLY 多項式と Kauffman 多項式との関係に関する予想を肯定的に解決した．また，A. Stoimenow および D. Matei との共同研究において，色付き Jones 多項式と結び目の mutation に関する Przytycki (Kirby 問題 1.91(2)) の予想に対する反例を与えることができた. その他の結果として，私は Khovanov 理論から導かれる Rasmussen の不変量を用いて，ある種の Casson handle のエキゾチック性のゲージ理論を用いない別証明を与えた.

7．2006 年〜2007 年

4 次元多様体の幾何構造に関する研究を行った．私は Rasmussen の不変量を用いて，4 次元空間のすべての非コンパクト連結可微分 4 次元部分多様体が少なくとも 2 つの微分構造を許容しうることを示した．一方，Donaldson 理論を用いることにより，CP^2 を任意の個数連結和して出来る多様体の中の，任意の非コンパクト連結可微分 4 次元部分多様体に対して，同様の結果を導くことが出来ることを示した.