

## 今後の研究計画

安田 貴徳

(1) 残りの CAP 形式を構成する。

$Sp(2)$  の四元数的内部形式  $G$  の CAP 形式をいくつか構成したわけだが、まだ他にも CAP 形式が存在する。例えば、齋藤黒川表現の内部形式版の場合でも、 $GL(2, \mathbb{A})$  の無限次元既約 cusp 表現  $\pi$  に対し、その標準  $L$ -関数が  $s = 1/2$  で 0 でない場合は構成できているが、そうでない場合はまだ構成できていない。この場合は Piatetski-Shapiro の構成法に倣い  $SL(2)$  の 2 枚被覆からのテータリフトで作る方法が考えられる。それ以外に Soudry が構成したような non-Siegel parabolic 部分群に関する CAP 形式の内部形式版も存在するはずである。これらは階数 1 の歪エルミート空間のユニタリ群からのテータリフトで作れるであろう。これらに関してはその構成法からまた Hasse 原理の不成立から“重複度 1”が成り立たないものが作られるはずである。また Piatetski-Shapiro や Soudry が行ったように CAP 形式の  $L$ -関数による特徴付けも考えていきたい。そのためにはまず  $G$  に対する  $L$ -関数の定義を考えなければならない。

(2) 吉田リフト、荒川リフトの non-vanishing の条件を記述する

齋藤黒川表現にあたる  $G$  の CAP 形式は四元数環  $R$  上の階数 2 の歪エルミート空間  $V$  の特殊ユニタリ群  $SU(V)$  の既約 cusp 表現からのテータリフトで作られた。 $SU(V)$  はある四元数環  $B$  が存在し、次のように実現される。

$$\{(b, \tilde{b}) \in B^\times \times \tilde{B}^\times \mid \nu_B(b) = \nu_{\tilde{B}}(\tilde{b})^{-1}\} / \{(z, z^{-1}) \mid z \in k^\times\}.$$

ここで  $\tilde{B}$  は  $k$  のブラウアー群で  $B \cdot R$  と一致する四元数環であり、 $\nu_B, \nu_{\tilde{B}}$  はそれぞれ  $B, \tilde{B}$  の被約ノルムである。これにより  $SU(V_{\mathbb{A}})$  の既約 cusp 表現はおおよそ  $B_{\mathbb{A}}^\times$  の既約 cusp 表現と  $\tilde{B}_{\mathbb{A}}^\times$  の既約 cusp 表現のテンソル積と見ることができ、CAP 形式を作る場合  $SU(V_{\mathbb{A}})$  の既約 cusp 表現としては  $\pi \otimes 1$  の形のものだけ考えればよかった。ここでこの片方の表現が自明であるという条件を取り除く。すなわち一般に  $\pi_1 \otimes \pi_2$  の形の  $SU(V_{\mathbb{A}})$  の既約 cusp 表現を考えると、それから得られるテータリフトは吉田リフト、荒川リフトと呼ばれるものになる。これらのリフトはテータ積分として定義はできるが、像が 0 になる場合もある。この像が消えないための必要十分条件は分かっていない。