# 研究成果

鎌田　直子

1988 年に E. Witten が提案したコンパクト単純リー群 G を用いた３次元閉多様体の不変量である量子 G 不変量は, N. Yu. Reshetikhin, V. G. Turaev, R. Kirby と P. Melvin らによって数学的な定義が与えられ, $S^3$ から絡み目に沿った手術で得られる３次元多様体の量子 PSU(2) 不変量とその絡み目のジョーンズ多項式との関係が見い出された. H. Murakami は有理ホモロジー３次元球面の Casson-Walker 不変量と量子 PSU(2) 不変量との間にある種の関係があることを発見した. 有理ホモロジー３次元球面ではない場合として, 論文 [1] では Z/5Z ベッチ数が正である３次元閉多様体に関しても同様の関係が成り立つことを証明した.

1985 年に V. F. R. Jones によって定義されたジョーンズ多項式は, von Neumann 代数を通して定義された絡み目の不変量であり, 結び目理論において最も重要な発見の一つである．一方, L. H. Kauffman は $S^2$ 上の絡み目ダイアグラムの正則イソトピー不変量であるブラケット多項式をステイトモデルを利用して定義し, 絡み目の捻り数とブラケット多項式の積がジョーンズ多項式と一致することを示した. その拡張として, 論文 [2] では有向連結閉曲面 $F$ 上の絡み目図式に対してもブラケット多項式が定義できることを示し, １次元実空間 $R$ と $F$ との直積空間 $F \times R$ 内の絡み目に対してジョーンズ多項式を定義した. これを利用して L. H. Kauffman と K. Murasugi の定理として知られている $S^3$ 内の交代絡み目に関する定理「２次元球面上の連結で既約な交代絡み目ダイアグラムが同じ絡み目型を表すならばそれらの交点数は等しい」を $F \times R$ 内の絡み目に拡張した.

90 年代後半に, 仮想結び目理論が L. H. Kauffman により導入された．これは有向閉曲面上の結び目ダイアグラム及びガウスコードに着目した結び目理論の拡張であり, 結び目ダイアグラムにおいて仮想的な交点を許すことにより定義される．彼は結び目の不変量であるジョーンズ多項式を仮想結び目に対して拡張した．仮想結び目は、M. Goussarov, M. Polyak, O. Viro により結び目の Vassiliev 不変量の研究に利用されている。D.S. Silver, S.G. Williams は仮想結び目の結び目群について研究し、その特徴付けを与えることに成功した．J. Sawollek は F. Jaeger, L. H. Kauffman, H. Saleur の定義した $F \times R$ 内の結び目の不変量を, 仮想結び目に適用した (JKSS 不変量と呼ばれている). 抽象結び目ダイアグラムはコンパクト有向平曲免状の絡み目ダイアグラムで, そのダイアグラムが曲面の変位レトラクトとなっているものである. 論文 [3] において仮想結び目と抽象結び目との間に 1 対 1 対応が存在することを示した. 抽象結び目を利用することで, 仮想結び目の基本群の幾何学的な意味を与えることに成功した. 仮想結び目のジョーンズ多項式は通常の結び目のそれとは異なった性質をもつが, 論文 [4] においてチェッカーボード彩色可能なダイアグラムをもつ仮想結び目のジョーンズ多項式は通常の結び目と同じ性質を持つことを示した. 論文 [5] において仮想結び目のジョーンズ多項式に関するある種のスケイン関係式を発表した. 論文 [6] においては先のスケイン関係式を補う形で別のスケイン関係式を示した.