研究計画

宮澤 治子

私はこれまで, 結び目 (絡み目) の不変量と局所変形の関係に関して研究をしてきたが, 今後もこの研究を続けていきたい.

近年, V. A. Vassiliev により, 位数 n の Vassiliev 不変量と呼ばれる結び目の新しい不変量が定義された. 位数 n の Vassiliev 不変量は, 絡み目に対しても同様に定義できる. 今までに知られている不変量の多くは Vassiliev 不変量であり, 一般に, 量子群に付随して得られる様々な不変量は Vassiliev 不変量になっていることが知られている.

一方, K. Habiro により定義された, 自然数 n に対応する C_n-move と呼ばれる絡み目の局所変形がある. C_n-move は Vassiliev 不変量と深い関係があり, S^3 内の 二つの絡み目が有限回の C_{n+1}-move で移り合うならば, それらは V_n-equivalent であるということが示されている. ここで, 二つの絡み目 L と L' が V_n-equivalent であるとは, 位数が n 以下の任意の Vassiliev 不変量 v に対し, $v(L) = v(L')$ が成り立つときにいう.

結び目に関しては, C_n-move と Vassiliev 不変量の間のより深い関係が証明されている: S^3 内の 二つの結び目 K, K' が有限回の C_{n+1}-move で移り合うことと V_n-equivalent であることは同値である.

上の結果が示すように, 結び目に対しては Vassiliev 不変量と C_n-move の間には, 非常にきれいな対応がある. この対応は絡み目に対しては完全でない. つまり, V_n-equivalent だが有限回の C_{n+1}-move で移り合わない二つの絡み目がある. 二つの絡み目が C_{n+1}-move で移り合うならば, それらの位数 n 以下の Vassiliev 不変量は等しいので, 絡み目に対しては, C_{n+1}-move と完全に対応をつけるには, 位数 n 以下の Vassiliev 不変量以外にどんな不変量を用いて条件を記述すればいいかということが問題となる. この問題に対しては, これまでに部分的な解答が得られている. n を制限したり絡み目の成分数を固定したり, あるいは特殊な絡み目に限ることで, 二つの絡み目が C_{n+1}-move で移り合うことの必要十分条件を不変量の言葉で記述している. しかし, 一般の n におけるこの問題は依然残されており, 容易ではないと思われるが, 今後挑戦したい問題のひとつである.

結び目に関する上の結果を絡み目に対して完全な形に近づけようとするとき, 上のアプローチの方法の他に, 位数 n 以下の Vassiliev 不変量の値が等しい二つの絡み目の幾何的特徴を挙げるということがある. この問題に対しては, $n = 2, 3$ のとき, 二つの絡み目が位数 n 以下の Vassiliev 不変量の値が全て等しいことと, C_{n+1}-move と特別な C_n-move, C_{n-1}-move で移り合うことが分かっている. 私はさらにこの問題を一般の位数に拡張したいと思っている.

また, 上の問題に関連したものとして, 絡み目全体の集合に代数構造を定義するということにも興味がある. 結び目の有限回の C_{n+1}-move で移り合うという同値関係による同値類の集合は, 結び目の連結和を演算として群になることが知られていて, このことは結び目が有限回の C_{n+1}-move で移り合うことと V_n-equivalnt であることが同値であることを示す上でのひとつの鍵となっている. ところが, 絡み目の場合は, (通常の意味での) 同値類の集合において, 「連結和」というものが定義されていない. そこで, 絡み目のある同値類の集合における演算をどのように定義すればいいかということに興味があり, 今後考えていきたい.