

今後の研究計画

絡み目は閉ブレイド表示できることが分っている。その事実を踏まえ、河内明夫先生は次のプロジェクトを提案した。「閉ブレイド表示を用いて絡み目を順番に並べる。さらにその結果を使い、3次元多様体を並べる。」このプロジェクトに従い、長さ 10 までの多様体の分類表を完成させることが主要な当面の目的である。

ここでプロジェクトの概要を述べておく。河内先生は、絡み目全体の集合に、ある整列順序を導入した。それは自然に、向き付け可能な3次元閉多様体全体の集合上の整列順序も導くものである。

絡み目全体の集合上の整列順序は次のように定められた。各絡み目に対し、lattice point とよばれる有限整数列をあてがうが、その数列の項数は絡み目を閉ブレイドで表わしたときの最小交点数に等しい。以後その項数を絡み目の長さとしてよぶ。定義は4段階に分かれ、その第1段階は、「2つの絡み目 L と L' について、 L の長さが L' の長さより小さいなら、 L は L' より小さい。」であり、第2段階以降は長さが等しい場合の大小関係を定めていく。任意の自然数 n に対し、長さが n となるような絡み目は有限個しかないことも分っている。これにより、絡み目を小さい順番に並べることができる。

次に多様体全体の集合上の整列順序であるが、河内先生は、向き付け可能な3次元多様体全体の集合 \mathbf{M} から素な絡み目全体の集合 \mathbf{L}^p への単射 $\alpha : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{L}^p$ を次のように定めた。

写像 $\chi : \mathbf{L}^p \rightarrow \mathbf{M}$ を各 $L \in \mathbf{L}^p$ に対し、 $\chi(L) = \chi(L, 0)$ ($= L$ で 0-surgery した多様体) と定めると、 χ は全射であることが分っている。そこで、 $M \in \mathbf{M}$ に対し、 $\alpha(M) = \min\{L \in \chi^{-1}(M) : L' \in \chi^{-1}(M), \pi_1(E(L)) = \pi_1(E(L')) \Rightarrow L < L'\}$ と定める。(ここに $E(L)$ は L の外部をあらわす。)

これにより、 \mathbf{M} を \mathbf{L}^p の部分集合とみなし、整列順序を導入した。この順序のもとに多様体を小さい順番に並べることができる。

長さが 10 までの絡み目の列挙は済んでいるので、その結果を使い、長さが 10 までの多様体の列挙を行う。絡み目のリストは既にできているのだから、 α の値域を小さい順番に整理して並べれば多様体を列挙することができる。理屈は簡単だが、仕事は楽ではない。何故なら、この写像は定義されていても、値を求めることが困難だからである。なお河内先生は多様体の列挙の方法も打ち出している。