今後の研究計画

黒木慎太郎

私は、将来も変換群論を中心として研究を続けていきたいと思っています。特に近い将来重点をおきたい研究は論文リストの (4)（と学位論文の Part2）で研究した GKM グラフに関してです。この分野は、現在活発に研究がなされ始めてきて、トポロジーと組み合わせ論の橋をかけるものとして期待されています。

論文 (4) の中で私は、研究業績の説明にも書いたハイパートーラスグラフと言う新しい GKM グラフのクラスを定義しています。またその論文の中では、ある制限を付けた時（ハイパートーリック多様体から定義される GKM グラフを含むような場合です）の同変グラフコホモロジー環 $H_T^*(\Gamma)$ に関しての結果しか得ていないのですが、この結果は（トーラス多様体の余接バンドルからくる GKM グラフを含むような場合にまで）一般化出来ると思っています。更に一般化した時の応用として Maeda-Masuda-Panov の論文にあるトーラスグラフの $H_T^*(\Gamma)$ の組み合わせ的な記述のみならずそれを一般化した '足'（一つの頂点から出る半直線のことです）を持っても良いようなトーラスグラフに関する組み合わせ的な $H_T^*(\Gamma)$ の記述を得ることが可能だと思っています。このような観点からハイパートーラスグラフは今まで定義されている組み合わせ的に $H_T^*(\Gamma)$ が記述できる GKM グラフを本質的に全て含むものだと期待しています。

また、論文 (4) でハイパートーラスグラフを更に一般化した quaternionic torus graph と言う GKM グラフも定義しました。このグラフはハイパートーリックやトーラス多様体の余接バンドルのみならず四元数射影空間 $\mathbb{H}P(n)$ や複素二次超曲面 Q_{2n} から定義される GKM グラフをも含んでいます。これは非常に面白い多様体のクラスを定義できる可能性を含んでいて、トーリックの四元数化にあたる多様体のクラスを定義出来るのではないかと考えています。この研究の動機は、1991 年に Davis-Januszkiewics 等が定義した擬トーリック多様体の研究が背景にあります。擬トーリック多様体とは代数幾何における重要なクラスであるトーリック多様体を位相的に構成したものです。（擬）トーリック多様体の代表的な例として T^n 作用をもつ複素射影空間 $\mathbb{C}P(n)$ が存在しています。今、円周 S^1 は $\mathbb{C}^*$ の maximal compact subgroup と思えるので、（擬）トーリック多様体は複素数にあたるものと思えます。Davis-Januszkiewics 等は更に重要なクラスとして同じ論文の中で small cover と呼ばれるトーリックの実数化とも言えるクラスを定義しています。それは代表的な例として ${\mathbb{Z}_2}^n$ 作用を持つ実射影空間 $\mathbb{R}P(n)$ を含んでいます。$\mathbb{Z}_2$ は $\mathbb{R}^*$ の maximal compact subgroup と思えるので small cover は実数にあたるものと言えます。そこでトーリックの四元数化にあたるクラスも構成できるのではないかと考えることは自然なことです。もしもトーリックを四元数化した多様体と群作用のクラスを定義できたのなら、その代表的な例として $Sp(1)^n$ 作用を持つ四元数射影空間 $\mathbb{H}P(n)$ を含んで欲しいと思うのが自然なことと思います。$Sp(1)$ は $\mathbb{H}^*$ の maximal compact subgroup でした。1995 年にこのような動機の下で R. Scott が Davis-Januszkiewics 等の構成の類似な構成方法からそれにあたるクラスを定義しようと試みました。しかし出てきたものは $Sp(1)^n$ 作用を一般的には持っていませんでした。これは、変換群論の立場からはトーリックの四元数化とは言いがたいと思います。そこで、それにあたるクラスを定義しそれがトーリックや small cover とどれだけ性質に違いが生じてくるのかを研究しようと言うのが二つ目の計画です。もしも我々の定義した quaternionic torus graph から多様体と T^n の作用を復元し、その作用が $Sp(1)^n$ 作用へ拡張できたのならば変換群論の立場から見てもトーリックの四元数化と呼べるものが現れてくるのではないかと期待しています。

これらとあわせて、GKM グラフを更に深く研究することでトポロジーと組み合わせ論との更なる関係を明らかにしていく予定でいます。また、この研究を通して得られた、テクニックや知識を駆使して非コンパクト変換群の位相的な不変量を見つけることも将来的にはやっていきたいと思っています。