

## これまでの研究成果のまとめ

黒木慎太郎

私は修士課程以来、変換群論を位相幾何的な側面から研究してきました。変換群論の重要な問題の一つに分類問題があります。分類問題を軸として特に、興味のある対象は、非コンパクトリー群の可微分作用に関する問題と、変換群の不変量である同変コホモロジー環についてです。以下の番号は特に注意しなければ、研究業績リストに書いた論文の番号と一致します。

0.1. コンパクトリー群の作用の分類について。完全に分類できる場合として (2) の研究において、私は有理数係数コホモロジー環が複素二次超曲面  $Q_{2n}$  のそれと同一になるような単連結コンパクト多様体  $M$  上に余次元 1 の主軌道を持って働くコンパクトリー群と  $M$  の位相型の完全な分類を行いました。これは、1978 年の F. Uchida が有理コホモロジー複素射影空間  $\mathbb{C}P(n)$  について同様の研究をしたことを動機としており、彼の研究において多様体の位相型として奇数次数の複素二次超曲面  $Q_{2n+1}$  が  $\mathbb{C}P(n)$  以外に得られていました。そこで、偶数次数の複素二次超曲面  $Q_{2n}$  に関して分類したというのがこの研究です。この結果 8 つの作用が存在することがわかり、得られた多様体として、複素二次超曲面とは位相的に異なる多様体の一つ、また 2002 年の A. Kollross の研究からは得られないような複素二次超曲面への群作用の一つ得ることが出来ました。

0.2. 非コンパクトリー群の可微分作用について。一般に多様体上のコンパクトリー群の作用の全体を同値関係で割ると離散的な空間になります。ところが、多くの場合非コンパクトリー群の作用全体はそうはならず連続的なものとなります。このような違いから非コンパクトリー群の作用とコンパクトリー群の作用の間には、分類問題を考える上で大きな違いが生じてきます。そこで、非コンパクト群作用を研究する場合は作用の仕方に適当な制限を付けます。例えば、実解析的な作用と言う制限を付ければ、不動点の近傍で線形化可能であるのでだいぶ研究しやすくなります。しかし、それよりも広い  $C^\infty$  な作用 (可微分作用) は不動点の近傍で線形化可能とは限らない事実より研究するのが難しいものとなっています。

そこではまず可微分作用の具体例の考察から始めようと思い (1) の研究において ( $\mathbb{H}$  を四元数とした時)  $SL(m, \mathbb{H}) \times SL(n, \mathbb{H})$  の  $S^{4(m+n)-1}$  への可微分な作用を構成し互いに異なる無限個の可微分作用を得ました。

(3) の研究において、 $SO(3)$  の  $S^4 \subset \mathfrak{so}(3)$  への共役作用の  $SL(3, \mathbb{R})$  への拡張作用を構成しました。これは、F. Uchida の 1985 年に提出された問題「 $SO(3)$  の  $S^4 \subset \mathfrak{so}(3)$  への共役作用の  $SL(3, \mathbb{R})$  への可微分な拡張作用は存在するだろうか？」と言う問題を動機としていて、彼の構成した作用とは異なる作用を得ることに成功しました。また、その時に用いた  $\mathbb{C}P(2)$  を複素共役で割ると、 $S^4$  になる事への証明も付けました。この研究で得た作用は連続で可微分ではなかったのですが、 $SO(3)$  の共役作用が  $SL(3, \mathbb{R})$  への可微分作用への拡張を持たないだろうとの確信が強まりました。

0.3. 同変コホモロジーについて。コンパクトリー群の作用でも一般の場合は分類が困難なので不変量を考察するのが普通です。変換群論には同変コホモロジーと呼ばれる不変量があります。それに関する研究を (4) で行いました。GKM グラフとは、 $n$  価グラフでその各辺にラベル (トーラスのリー環の双対  $\mathfrak{t}^*$  の元で) を付けられたグラフのことです。このグラフはトーラス作用を持つ多様体に対して重要な役割を果たします。トーラス作用を持つ多様体  $M$  が [1] 不動点集合が有限個、[2] 不動点の近傍で pairwise linearly independent、[3]  $M$  が equivariantly formal space、なる条件を満たせば、 $M$  へのトーラス作用による不動点を頂点と思い、二つの頂点間を結ぶ一次元軌道より作られる  $S^2$  を一つの辺、もしくは一つの頂点を中心として  $\mathbb{C}$  が一次元軌道より作られるのならそれを足 (頂点から延びる半直線) と思うことによって、( $\dim M = 2n$  とすると)  $n$  価グラフが得られます。また、各不動点の接空間へのトーラス表現の isotropy weight からラベルを各辺に与えることが出来ます。そうして上の三つの条件を満たす  $M$  から GKM グラフ  $\Gamma(M)$  を得ることが出来ます。また一つ GKM グラフ  $\Gamma$  を与えたと同変グラフコホモロジー  $H_T^*(\Gamma)$  と呼ばれる環が定義されます。重要な事実として、ある多様体  $M$  上のトーラス作用の同変コホモロジー環  $H_T^*(M)$  とそこから定義される GKM グラフの  $H_T^*(\Gamma(M))$  が同型になるという定理があります。よって  $H_T^*(M)$  を計算する代わりに  $H_T^*(\Gamma)$  を計算すれば良いことがわかります。しかし  $H_T^*(\Gamma)$  を具体的に計算することは、 $H_T^*(\Gamma)$  の定義がグラフの頂点から  $H_T^*(pt)$  へのある条件を満たす写像全体のなす環として定義されるので一般には難しいものとなっています。ところが、計算が非常に簡単になる場合があります。同変グラフコホモロジー環がグラフの組み合わせ構造より定義される環と同型になるような場合です。例えば、現在までに知られているものとしては、Maeda-Masuda-Panov 等によるトーラスグラフと言うトーラス多様体から定義される GKM グラフを含むクラスがそのような場合になります。そこで私は (4) においてハイパートーラスグラフと言う GKM グラフの新しいクラスを定義し、その同変グラフコホモロジーの組み合わせ的な記述について研究しました。これは、ハイパートリックやトーラス多様体の余接バンドル等から定義される GKM グラフを含むクラスになっています。