今後の研究計画　成田宏秋

今後の研究テーマとして以下の２つを考えている。

(1) 四元数離散系列表現を生成する $Sp(1,q)$ 上の保型形式の数論的研究 (主に $q=1$ の場合)。
(2) 古典型管型領域 (またはそれに対応するリー群) 上の正則保型形式の次元公式。

まず (1) に関してだが、その問題の一つとして、この保型形式のフーリエ係数の数論的意義について考察したいと考えている。保型形式のフーリエ係数の考察は、ジーゲルによる正則テータ級数のフーリエ係数を用いた２次形式の表現数の研究に代表されるように保型形式論の主要な研究テーマの一つである。楕円ポアンカレ級数のテータリフトのフーリエ係数を計算したのはこれまでの研究成果で述べた通りであるが他にもアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数の明示型も与えた。しかしこの保型形式のフーリエ係数の数論的意義に迫るためにはまだ多くの具体例を与える必要があると考えている。そのためにはより多くの保型形式の具体的構成を与えそのフーリエ係数を計算しデータを蓄積しなければならないと考えている。またこれについてはヘッケ作用素の跡公式も用意したいと考えている。ヘッケ作用素の跡はヘッケ同時固有関数のフーリエ係数と見做し得ると同時に多元環の類数の言葉で書けると考えられる。フーリエ係数のデータの蓄積とヘッケ作用素の跡公式の計算によりこの保型形式のフーリエ係数の数論的意義を明らかにしたいと考えている。

また一方で、これまで研究してきたテータリフティングについても依然多くの課題が残っている。例えばリフティングの非消滅性の証明や四元数離散系列を生成する保型形式の空間におけるリフト像の特徴づけが重要な問題として残っている。前者についてはその手法としてリフティングのフーリエ係数や内積公式の考察を考えている。後者については当初は L 関数の極の位置で特徴付けられると期待していたが最近得た (スピノール)L 関数の具体型から判断して、それはあまり期待できず違う特徴づけを探す必要があると考えている。

次に (2) についてであるが、一般に離散系列表現が存在する半単純リー群 G 上の可積分離散系列表現 π を与え、G の余体積有限な不連続部分群 Γ を一つ固定したとき、π を生成する G 上の左 Γ 不変な有界保型形式の空間 $S_\pi(\Gamma)$ の次元は「ゴドマン公式」と呼ばれる以下の表示を持つ。

$$\dim_{\mathbb{C}} S_\pi(\Gamma) = \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma\in\Gamma} f_\pi(g^{-1}\gamma g)dg$$

ここに f_π は π の球跡関数と呼ばれるものである。この研究についてこれまでわたくしが得た結果は、この次元公式に現れるべき単元の寄与

$$\int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ :\mathrm{unipotent}}} f_\pi(g^{-1}\gamma g)dg$$

が、積分と和の順序交換の問題を無視すると、形式的に概均質ベクトル空間のゼータ関数のゼータ積分の類似型と言えるものの和で表示できるということである。

これは、一般にべき単元の中でいわゆる「非中心的なもの (つまり極大放物型部分群のべき単根基の中心の元に共役になることがないもの)」による次元公式への寄与は消えるであろうという予想を調べることを動機とした研究である。実際 G が古典型管型領域に対応するリー群で π が正則離散系列のとき、つまり $S_\pi(\Gamma)$ が G 上の有界正則保型形式の空間になるとき (但しその中の「II 型領域」に対応する場合は除く)、非中心的べき単元の寄与を表示するゼータ積分に現れる試験関数は、消えると期待される積分表示を持つことが証明できた。これは上で述べたように和と積分の順序交換の問題を考えない前提の下での研究なので予想の証明にはならないが、その大きな根拠を与えていると言える。今後は積分と和の順序交換の問題を如何にして克服するかを探り、予想の厳密な証明を与えたいと考えている。