これまでの研究成果のまとめ　成田宏秋

わたくしの専門は整数論であり主に保型形式論を研究している。これまで研究してきたことは保型形式のフーリエ展開の理論の構成とその応用である。保型形式論においてフーリエ展開は基本的且つ有用な研究手段を与える。実際それは、保型形式の解析的及び数論的情報を豊富に持ち合わせており、例えばそれは保型形式論の主なテーマの一つである保型 L 関数の研究に有用である。これまでわたくしが研究してきたフーリエ展開は (1) 管型領域上の正則保型形式の極小放物型部分群に関するフーリエ展開 (2) 符号 $(1+, q-)$ の四元数ユニタリー群 $Sp(1, q)$ 上の四元数離散系列表現を生成する保型形式のフーリエ展開、の以上２つである。そして最近は後者の保型形式について構成したフーリエ展開を基に更なる進展が認められており、この保型形式の研究はわたくしの現在の主な研究テーマの内の一つとなっている。以下ではこの四元数離散系列を生成する $Sp(1, q)$ 上の保型形式についてこれまで得た結果について説明する。

まず最初の応用として、この四元数離散系列を生成する保型形式が「ケッヒャー原理」を満たすことを $q > 1$ の場合で証明した。つまりこの保型形式は自動的に「緩増加」であることが分かった ($q = 1$ の場合は不成立)。これはこの保型形式の興味深い性質を現している。実際このケッヒャー原理はこれまで多変数の正則保型式について認められてきたことなのだが、実はこの保型形式は非正則なのである。つまりこの四元数離散系列を生成する保型形式はその非正則性にも関わらず正則保型形式と似た振る舞いをすると言える。これまで非正則保型形式の中でケッヒャー原理が確かめられた例は殆どないものと思われる (これについてはドン・ザギエ氏がヒルベルトマース形式も上の意味でのケッヒャー原理を満たすことを指摘している)。

そして次の応用として、この四元数離散系列を生成する保型形式の具体的構成を与えた。より詳細には、(1) アイゼンシュタイン級数とポアンカレ級数 (2) 楕円尖点形式からの「テータリフティング」による構成、の以上２つを与えた。前者についてだが、アイゼンシュタイン級数はフーリエ展開の定数項に表れる関数から、ポアンカレ級数はフーリエ展開の尖点的項に現れる関数から、それぞれある種の無限級数を作ることで構成される。そしてフーリエ展開からこれら 2 種類の級数が四元数離散系列を生成する保型形式の空間の基底を成すことを証明できる。他方テータリフティングによる構成だが、これはこの保型形式の研究の創始者である荒川恒男氏により定式化されたもので、荒川氏は $q = 1$ の場合でこのリフティングが四元数離散系列を生成する保型形式であることを証明している。しかし $q > 1$ の場合は証明していなかった。わたくしはこの問題を解決するため、楕円尖点形式の空間の基底を成す楕円ポアンカレ級数のリフティングのフーリエ展開を計算した。そしてこれにより荒川氏が扱っていなかった $q > 1$ の場合が解決できた。

最近は京都産業大学の村瀬篤氏とチームを組み、このリフティングの数論的研究を行っている。我々は $q = 1$ の場合について荒川氏の与えたリフティングを (アデール化された) 楕円尖点形式と定符号四元数環の乗法群上の保型形式とのペアから $Sp(1, 1)$ のアデール群上の保型形式へのテータリフティングとして再定式化し、そのヘッケ作用素の作用を調べた。その結果このリフティングは、楕円尖点形式と四元数環上の保型形式に作用するヘッケ作用素と $Sp(1, 1)$ の similitude 群 $GSp(1, 1)$ のヘッケ作用素に関するよい交換関係式を満たすことが分かった。そしてこれにより、このリフティングに付随する保型 L 関数 (より正確には「スピノール L 関数」) の分岐素点を含むすべての有限素点での局所因子を楕円尖点形式及び四元数環上の保型形式のヘッケ固有値を用いて与えることができ、しかもそれはいくつかの興味深い性質を持つことが分かった。例えば、不分岐素点での局所因子は楕円尖点形式の L 関数と四元数環上の保型形式の L 関数の局所因子の積に分解することや、すべての分岐素点での局所因子が楕円尖点形式の局所因子に一致する場合があることなどが分かった。