

研究計画

新庄玲子

結び目理論や空間グラフ理論において、分類表を作成することは大きな目標である。その際、同値関係の入れ方によっては様々な分類が得られるが、その一つとして不変量を用いた局所変形による分類が挙げられる。粗い分類から始め次第に分類を細かくしていくという立場から、ダイアグラムから計算可能な不変量を用いて、絡み目（結び目を含む）や空間グラフの局所変形による同値関係による分類に関する研究をすすめたいと考えている。

論文 [2] では境界絡み目の拡張として、グラフの空間埋め込みで、含まれる全ての結び目に互いに内部が交わらない連結かつコンパクトな向き付け可能曲面を張ることができるものを、グラフの境界空間埋め込みとして定義し、その幾何的性質について考察した。しかし、このグラフの境界空間埋め込みの定義は、境界空間埋め込みを持つグラフを、ある条件を満たす平面的グラフのみに限定してしまう。よって定義をより一般化し、得られた結果をグラフ全体に拡張することを目指し、引き続きグラフの境界空間埋め込みに関する研究を行いたい。論文 [3] では、K. Kobayashi によって導入されたグラフの局所自明空間埋め込みという概念に着想を得て、グラフの標準的空間埋め込みの定義という問題に取り組み、グラフの任意の空間埋め込みに対し、含まれる結び目に張られる、異なる境界を持つ互いに内部の交わらない連結でコンパクトな向き付け可能曲面の枚数を、グラフの抽象的な構造から決まる値で上から評価した。さらに、その値を円板を張ることで実現できるグラフの空間埋め込みの構成に成功した。この上限を円板で実現するグラフの空間埋め込みは、自明な結び目や絡み目ほど強いものではないが、ある種の一意性を保有するものであると思われる。よって、その空間埋め込みをグラフの標準的埋め込みとよぶことが妥当であるかどうかの考察を行い、グラフの標準的空間埋め込みの定義という問題の解決を目指したい。また、この上限を曲面を張ることで実現できるグラフの空間埋め込みを、新たな境界空間埋め込みの定義として採用することで、境界空間グラフに関して得られている結果を自然に拡張することができるのではないかと考えている。

論文 [1] と [2] で行った空間グラフの同値関係による分類は、局所変形によって不変量を用いたものである。それとは逆に、局所変形によって生じる変化の度合いから幾何的な構造を考察するという視点から、結び目や空間グラフの局所変形によって変化する量に着目し、局所変形がそれをどのように変化させるか、またその差が他のどのような幾何的な情報を含んでいるのかを考察することにより、それらを大域的な幾何的構造の研究に応用していくことを考えたい。

この方向からの研究として、組み紐の exchange 変形のなす同値関係による分類への、結び目理論の観点からの取り組みを計画している。J. S. Birman-W. W. Menasco の 3 次の組み紐の分類定理により、 n が 1, 2, 3 いずれかのときは n 次の組み紐の閉包として表される絡み目に対し、その絡み目を閉包として持つ、 n 次の組み紐の共役類は有限個しかないことが知られている。さらに彼らは、同じ絡み目を閉包として持つ、互いに共役でない組み紐の無限列が存在するならば、それらは exchange 変形による同値関係のもとで、有限個の類に類別されるということも示している。ある絡み目に対し、それを表す n 次の組み紐全体の exchange 変形で移り合う類を、具体的に決定することは困難であると思われるが、無限列が存在する場合には、任意に与えられた n 次の組み紐がその絡み目を表すかどうかの判定に利用できるのも、興味深い問題である。プレプリント [6] では、任意に与えられた結び目（またはある条件を満たす絡み目）を閉包として持つ n 次の組み紐 ($n \geq 3$) に対して、これと同じ閉包を持つ、互いに共役でない $n+1$ 次の組み紐の無限列を与えた。この無限列において、隣合う 2 つの組み紐は 1 回の exchange 変形で移り合うことが確認できる。この exchange 変形は隣合う 2 つの組み紐から構成される 2 つの絡み目間の、コンウェイ多項式の 3 次の係数を $n-2$ 変えるような絡み目のある局所変形に対応している。このことから、exchange 変形のなす同値関係による分類に、結び目理論への書き換えを用いたアプローチができるのではないかと考えている。例えば無限列を含むクラスがいくつできるかなど、同じ閉包を持つそれぞれの次数の組み紐群の共役類が、exchange 変形で移り合う類としてどのように散らばるかについて、与えた無限列における exchange 変形の振る舞いを考察することは、exchange 変形による分類を与えるのに有効であると思われる。まずは組み紐から得られた絡み目の局所変形で生じる結び目不変量の差から、元の組み紐に関する情報の抽出を試みる。同時に、今回の結果のさらなる改良を目指す。