研究成果

新庄玲子

全てのグラフは空間へ埋め込むことができるが, 平面へは埋め込み可能なグラフ (平面的グラフ) と，埋め込み不可能なグラフ (非平面的グラフ) がある．平面的グラフに対しては, 空間内の平面への埋め込みとアンビエントアイソトピックな埋め込みが, 自明な空間埋め込みとして定義されており, それは自明な結び目や絡み目と同様, 最も簡単な ‘標準的’ なものであるといえる．しかし非平面的グラフには, どのように空間に埋め込んでも自明でない結び目や絡み目を含んでしまうものがあるため, 自明な空間埋め込みの決定は難しく, 一般のグラフに対する標準的な空間埋め込みの決定は, 一つの研究対象とされている．グラフの標準的な空間埋め込みの候補として, K. Kobayashi は局所自明空間埋め込みという概念を提唱した．グラフの空間埋め込みに含まれる, グラフの 1 次元ホモロジー群の基底に対応する結び目に, 互いに内部が交わらない円板が張ることができるとき, その埋め込みは局所自明であるといわれる．この概念に着想を得て，論文 [3] ではグラフの空間埋め込み (空間グラフ) の a collection of spanning surfaces(以下 spanning surfaces) という概念を導入した．空間グラフの spanning surfaces とは，空間グラフに含まれる結び目に張られた，異なる境界を持つ, 互いに内部の交わらない, 連結でコンパクトな向き付け可能曲面の集合のことである．特に各曲面が円板と同相なとき spanning disks という．T. Endo-T. Otsuki は, 全てのグラフが局所自明空間埋め込みを持つことを示した．しかし一般に, グラフの 1 次元ベッチ数は, その任意の空間埋め込みに張られる spanning surfaces の枚数の上限ではない．そこで, その上限を与えることを試み, 全てのグラフの任意の空間埋め込みに張ることができる spanning surfaces の枚数は, グラフのブロック分解の各成分の 1 次元ベッチ数から決まる値で上から評価できることを示した．さらにそれが上限となることを, 任意のグラフに対し, その値を円板で実現する空間埋め込みを与えることによって示した．この空間埋め込みは局所自明空間埋め込みにもなっており, グラフの標準的空間埋め込みの有力な候補であると考えられる．

論文 [2] では境界絡み目の概念を拡張して, 含まれる全ての結び目に対応する spanning surfaces が存在するグラフの空間埋め込みを境界空間埋め込みと定義し，それに関する研究を行った．全てのグラフが境界空間埋め込みを持つわけではないことが論文 [3] で与えた評価式より分かる．よって, まず境界空間埋め込みを持つグラフの完全な特徴づけを行った．次にグラフの境界空間埋め込みの幾何的な性質について考察し, 境界空間埋め込みの自己パス変形による分類を与え, さらに与えられたグラフの任意の二つの境界空間埋め込みが自己シャープ変形と呼ばれる局所変形によって互いに移り合うことを示した．これらの結果は L. Cervantes-R. A. Fenn と T. Shibuya によって与えられている境界絡み目に関する結果の自然な拡張となっている．

空間グラフの空間グラフホモロジー分類は, Wu 不変量を用いて K. Taniyma によりなされていたが, 論文 [1] では, グラフの空間埋め込みの Wu 不変量は，2 つの 1 次元球面の非交和，5 頂点完全グラフ, もしくは 3-3 頂点完全二部グラフに同相な部分グラフに対応する部分空間グラフの絡み数と Simon 不変量のみで決定されるということを示した．絡み数と Simon 不変量はともに正則図から簡単に計算ができるので，空間グラフの空間グラフホモロジー分類が簡単な計算で与えられることになった．さらに T. Motohashi-Taniyama が, グラフの二つ空間埋め込みが空間グラフホモロガスであることとデルタ変形で移りあうことが同値であることを, Taniyama-A. Yasuhara が, グラフの 2 つの空間埋め込みがデルタ変形で移りあうならば，それらの次数 1 の有限型不変量は一致するということを示していることから，グラフの空間埋め込みの次数 1 の有限型不変量が絡み数と Simon 不変量によって決定されることも分かった．

J. S. Birman-W. W. Menasco の 3 次の組み紐の分類定理により, n が $1, 2, 3$ のいずれかのときは n 次の組み紐の閉包として表される絡み目に対し, その絡み目を閉包として持つ n 次の組み紐の共役類は有限個しかないことが知られている．また 4 次の組み紐に関しては, H. R. Morton と E. Fukunaga がそれぞれ, 自明な結び目, $(2, p)$-トーラス絡み目 ($p \geq 2$) を閉包として持つ互いに共役でない組み紐の無限列を構成している．プレプリント [6] では, 結び目または, ある条件を満たす絡み目を閉包として持つ n 次の組み紐 ($n \geq 3$) と同じ閉包を持つ互いに共役でない $n+1$ 次の組み紐の無限列を与えた．既存の結果は共役でないことの証明に 4 次の組み紐群から 3 次の組み紐群への準同型や, ある組み紐不変量を用いたものであったが, 今回の結果は, 与えられた組み紐からある方法で構成される絡み目のコンウェイ多項式の係数の差を絡み数を用いて評価するという結び目理論の観点からの手法であり, より簡単な計算で結果を得ることができる．