

# 研究計画

山本 亮介

Giroux により示された、閉 3 次元多様体におけるオープンブック分解と接触構造との 1 対 1 対応は、どちらの構造を解析する上でも大きな役割を果たすことが明らかになってきた。オープンブック分解に関しては、Harer 予想の解決が大きな成果であり、接触構造に対しては、対応するオープンブック分解による接触構造の特徴付けの研究が活発に行われている。

私は、この 2 つの構造の対応をより深く理解する研究を現在進行中であり、今後の更なる発展を目指す。具体的には、以下のような研究を計画している。

overtwisted 接触構造とオープンブック分解 現在、3 次元多様体上の接触構造の研究は、接触構造を大きく 2 つのクラス、tight と呼ばれるものとそうでないもの (overtwisted と呼ばれる) に分けることを基礎としており、与えられた 3 次元多様体がどのように tight な接触構造を許容するかという情報が、その多様体の位相的性質をよく表すことが分かってきている。

私は、“これまでの研究成果” で述べたように、「3 次元多様体  $M$  のオープンブック分解が overtwisted 接触構造に対応するための必要十分条件は、そのオープンブック分解に正の安定化を何度か施し、ファイバー曲面上で Stallings twist が可能であるようにできる事」を示した。その証明は正の安定化の仕方を具体的に示すものだが、それをより詳細に解析することで、正の安定化を必要としない判定法を見つけたい。

tight 接触構造に対応するオープンブック分解のモノドロミー写像 3 次元多様体のオープンブック分解のモノドロミー写像は、ファイバー曲面上のいくつかの単純閉曲線のデーンツイストの積として表現することができるが、それを全て正のツイストとできるなら、そのオープンブック分解は、tight な接触構造に対応することが知られている。また、この逆は成り立たないことも分かっている。そこで、どのような負のデーンツイストが接触構造の tight 性を壊すのかを明らかにする研究を計画している。

3 次元球面内の曲面の村杉分解と接触構造 “3 次元球面内のファイバー曲面が村杉和分解を持つか” を判定する方法を見つけるというのは、Gabai による曲面の村杉和に関する幾何的研究が始まって以来の懸案である。そこで、村杉和分解を持たないファイバー曲面がサポートする接触構造に何らかの特徴づけをするというアプローチによって、判定方法を確立できるのではないかと考えている。

レンズ空間を生む 3 次元球面内の結び目 Berge により、デーン手術によってレンズ空間を生む 3 次元球面内の結び目のリストが作られており、Berge's list と呼ばれている。さらに、“3 次元球面内の結び目に対するデーン手術がレンズ空間を生むならその結び目は Berge's list の結び目である。” と予想されている。この予想の解決を目指し、以下のアプローチを考えている。

Berge's knot は、全てファイバー結び目であり、なおかつトンネル数 1 である。つまり、デーン手術により、種数 2 のヘガード分解を持つ結び目補空間から、種数 1 のヘガード分解を持つレンズ空間が生まれている訳である。この過程で、 $S^3$  のオープンブック分解の構造がどのような役割を演じているのかという点を解析することにより、まずは、“ $S^3$  内の結び目  $K$  がデーン手術によりレンズ空間を生むなら、 $K$  はファイバー結び目でなければならない。” という命題を示したい。これに成功すれば、この結び目が与える  $S^3$  のオープンブック分解がサポートする接触構造を考えることが出来る。そこで、この接触構造が種数 2 のヘガード曲面上に作る葉層構造にレンズ空間を生む結び目の特徴が現れるのではと期待している。