これまでの研究成果

山本 亮介

任意の閉 3 次元多様体 M には必ずファイバー結び目 (絡み目) が存在し、M をファイバー結び目 (絡み目) の近傍と円周上の曲面束とに分解できる。これを M のオープンブック分解と呼ぶ。M のオープンブック分解の構造の研究は、そのファイバー曲面の構造によって記述するという視点から様々になされて来た。中でも村杉和と呼ばれる曲面同士の結合方法の重要性が Gabai により明かにされている。例えば、2 つの曲面 R_1, R_2 の村杉和 R がファイバー曲面であるのは、R_1, R_2 が共にファイバー曲面であるときで、この逆も成り立つ。

私は、S^3 のオープンブック分解をそのファイバー曲面の村杉和に関する構造によって記述しようという観点に立ち、以下の研究成果を得た。

S^3 内の 2 橋絡み目がファイバー絡み目であるための必要十分条件を以下のように示した。2 橋絡み目 K のコンウェイ表示に K のザイフェルト曲面が持つ村杉和分解の情報を付加することで、コンウェイ表示を拡張し、K がファイバー絡み目であるため必要十分条件をこの拡張コンウェイ表示の特徴付けにより示した。

ホップバンド (1 回捻られたアニュラス) は，円盤を除けば S^3 内の最も単純なファイバー曲面である。よって、ホップバンドをいくつか村杉和して得られるファイバー曲面 (これをホッププラミングと呼ぶ) は、村杉和に関して基本的な構造を持つと言えるが、S^3 内のファイバー交代絡み目のファイバー曲面は必ずホッププラミングであることが、村杉により示されている。そこで、東京農工大の合田氏、学習院大の平沢氏と共同で、ホッププラミングをファイバー曲面に持つファイバー絡み目は，交代絡み目以外ではどのようなものがあるか？という問題について研究し、以下の結果を得た。

“概交代絡み目が持つ概交代ダイアグラムにザイフェルトのアルゴリズムを適用して得られるザイフェルト曲面がファイバー曲面であるための必要十分条件は、その曲面がホッププラミングであることである。”

Harer により、“3 次元球面内の任意のファイバー曲面は、(1) ホップバンドを村杉和する、(2) ホップバンドを取り去る [(1) の逆操作]、(3) Stallings twist を施す、という 3 つの操作によって円盤から構成される” という定理が示されている。さらに彼は、” 操作 (3) は不要” と予想した。ファイバー曲面 Σ に対する Stallings twist という操作は、Σ 上の閉曲線 c が S^3 内にある種の disk を張るとき、その c に沿っての Dehn twist として定められる。c が張る disk と Σ との交わりの連結成分の最小数をその Stallings twist の複雑度と定めるとき、Harer 予想の部分的な肯定的解答を次のように得た。

“複雑度 1 の Stallings twist は、操作 (1) と (2) を 1 回ずつにより実現される。”

M を向き付けられた閉 3 次元多様体とする。M のオープンブック分解に対し、そのファイバー曲面に正捻りホップバンドを村杉和すると、M の新たなオープンブック分解を得る。これをオープンブック分解の正の安定化と呼ぶ。Giroux により、M の全てのオープンブック分解の集合を正の安定化による同値関係で割ったものと、M の全ての正の接触構造と間の 1 対 1 対応が示された。そして主にこの対応から、上記の Harer 予想がホモロジー球面について正しい事が示された。

そこで私は、この 1 対 1 対応においてファイバー曲面上の Stallings twist の為す役割について研究し、それが overtwisted と呼ばれる接触構造に対応するオープンブック分解を特徴付ける事を発見した。すなわち、以下を示した。

“与えられたオープンブック分解が overtwisted 接触構造に対応するのは、それが Stallings twist を行うことのできるオープンブック分解と正の安定化のもとで同値であるとき、またそのときに限る。”