これまでの研究成果のまとめ

濱野 佐知子

Weierstrass の定理の高次元化可能性を問う Cousin 第 2 問題は, 岡・Cartan の研究そして Serre によって, その位相的障碍の cohomological な非存在という形での必要十分条件が与えられるに至り, (一応の) 解決を見た. また, Cousin 第 2 問題の条件を弱め, 与えられた集合を零集合の一部分としてもつ正則函数を求める問題は, Stein 多様体において任意の Cousin 第 2 分布に対して解けることが示されている. 一方で幾何学的には, この問題の解が定める零集合は与えられた集合に干渉する可能性がある. そこで, 複素多様体 X 上に Cousin 第 2 分布 $\mathfrak{D} = \{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$ が与えられているとき, X における正則函数 f を, 各 U_i では $h_i := f/f_i$ が正則かつ $\{x \in U_i \mid f_i(x) = h_i(x) = 0\} = \emptyset$ を満たすように構成する問題 (余零問題) を考える. このような f を $\mathfrak{D}$ に対する余零問題の解, という. 余零問題は古典的な $\mathbb{C}^n$ の領域の場合ですら現在でも未解決である. そこで応募者は論文 [2] では, Cousin 第 2 問題の可解性を交点数を用いて特徴づけることにより, 余零問題の解の存在について $\mathbb{C}^2$ の cylindrical domain において肯定的に解決し, 更に $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 3)$ においては具体例を与えることにより否定的に解決した. 本研究では対象を cylindrical domain に制限することにより, 交点数が具体的に計算できるようになったことが独創的な点である. その結果, 一般論からは導けない具体例の構成にも成功し, より一般な複素領域, 複素多様体, およびより singular な複素空間を扱う際の重要な手段を与えているという特色がある. 更に以上の結果を領域の分類へと応用し, 岡や Stein の結果を一般の cylindrical domain へ拡張しながら簡潔な証明を与えた.

ところで $\mathbb{C}$ の任意の領域は domain of holomorphy であるが, $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ の場合, domain of holomorphy は特殊な領域であり, 擬凸性という複素解析幾何的条件で特徴づけられる. domain of holomorphy の特殊性を示す結果として例えば Hartogs-Osgood の定理がある. 論文 [1] ではその実類似として, separately harmonic function に対する Hartogs-Osgood の定理の類似を導いた. すなわち, E を $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ の領域 D に含まれる compact 集合であり, $D - E$ が連結であるものとする. このとき, $D - E$ 上の任意の separately harmonic function は, D 上の separately harmonic function に一意的に拡張可能である. この結果は実及び多重非可換ポテンシャル論との結びつきの新たな端緒を開いた.

論文 [3] では山口博史氏との共同研究で, Riemann の moduli 空間および Teichmüller 空間における Bergman 計量や Robin 定数などの等角不変量の種々の変動（変分）について研究した. Riemann 面上の Bergman 計量はその正則族上の函数として subharmonic であるが, その精密な 2 階変分公式等が知られている. そこで, それらを擬凸状領域のファイバー空間の幾何へと応用・深化し, 従来複素解析幾何的に得られていた評価式を真に精密化することに成功した. 結果として, 擬凸状領域の bordered Riemann surface fibration $\mathcal{S} : t \mapsto S(t),\ t \in B$ と正則切断 $\alpha(t), t \in B$ が与えられたとき, 各 fiber $S(t)$ の点 $\alpha(t)$ に関する Robin 定数 $\lambda(t)$ が $t \in B$ に関し harmonic ならば変動 $\mathcal{S}$ は自明であることを得た.