研究計画

石渡 (平澤) 万希子

計画 1：結び目・絡み目の 5,7,(2,3)-move による同値類分類

絡み目の n-move 等局所的な変形が結び目解消操作になるか？という問いは、結び目理論の基本的な問題であるが, $n=3,4$ について 1980 年前後に Montesinous, 中西氏らにより結び目解消操作になると予想され 15 年以上も未解決であった. これらの問いに対してスケイン多項式不変量に関する考察, Fox n-彩色空間, それと密接な関係にある 2 重分岐被覆空間等により, 一部の特徴的な結び目集合に対して肯定的解答が報告されてきた. 3-move 予想に関しては, 1984 年に中西氏が反例の候補 L_{2BR} を提示しており, 2002 年 Przytycki-Dabkowski はそれを Burnside 群を用いて代数的に考察することにより真の反例であることを証明した. 4-move 予想に関しては, とても興味深い反例の候補が Askitas(1999) により提示されているが, 未解決であり, 河内氏 (1985) により提示された「全ての 2 成分絡み目は 2 成分自明絡み目またはホップ絡み目に 4-move 同値であるか？」という問いも未解決である. しかし 5-move に関しては, 様子が大きく変わり 3_1 結び目でさえ自明絡み目に 5-move 同値では無い. 2004 年より Przytycki, Dabkowski との共同研究により有理絡み目や 9 交点以下の絡み目に対する 5-move 同値分類を行っており, 論文 [7 (未発表)] で完成予定である. 今後, 私はさらに絡み目の集合を広げて 5-move 同値分類表を作成して行く. 5-move は (2,2)-move 2 回で構成されるが, (2,2)-move に関しては複数の結び目集合に対し結び目解消操作として有効である. 「(2,2)-move は結び目解消操作になる」という張替-中西-内田 予想 (1992) も, Przytycki-Dabkowski(2004) により否定的に解かれた. 3-,(2,2)-move に関しては結び目解消操作であることに対する反例は見つかったものの, 多数の結び目, 絡み目集合は自明絡み目に 3-,(2,2)-同値であると結論付けられている. 一般に $(2k+1)$-move は 2 つの $(2,k)$-move の組合せにより構成される. 1995 年に Przytycki により, $(2,3)$-move は結び目解消操作であるか？という問いが提示されている. 7-move は $(2,3)$-move 2 つの組合せにより構成されるが, 5-move と同様に結び目解消操作では無いことが容易に分かる. 今後, 私は (2,3)-move が結び目解消操作になるか否かの考察を行っていく. また様々な結び目集合について 5-, 7-move 同値分類に関する分類表を作成し, また 未解決問題に関する考察も行ってみたい.

計画 2 ：ローテーションに関する研究

論文 [5] に関する研究において向きに制限を与えた場合には Tristram-Levine 符号数がローテーションにより不変であることを示したが, 残されたケース (向きの逆転するローテーション) に関する考察を行いたい. また, 絡み目に対するローテーションによる絡み目不変量の動向を, 他の不変量に対しても考察したい.

Conway 結び目, 樹下-寺坂結び目は 11 交点のミュータント結び目の有名な例であり, スケイン多項式不変量は一致する. これらが異なる結び目型であることは Gabai(1984) により種数が 3 と 2 であることにより示された. 結び目の種数はスケイン多項式不変量よりもずっと荒い不変量であるが, この例では有効に働いたことは面白い結果であった. 論文 [5] の研究の過程においてローターの対称性を保存した形でザイフェルト曲面をうまく張ったことが不変量比較の重要なキーポイントとなったが, このザイフェルト曲面は対称性を持つ部分と外部との村杉和としてとらえることができる. この構造についても, 幾何的考察を行い種数およびその変化する状況を調べたい.