研究成果

石渡 (平澤) 万希子

空間グラフの理論は結び目理論を含み発展している. 抽象グラフに内在する性質 (内部構造) はそのグラフの空間表現 (外部構造) の性質を規定する. 1 次元多様体である結び目に対し, 空間グラフは 1 次元複体であり, 平面的グラフ等一部のグラフを除いて標準的空間表現の決定は未解決である. 対称性の高い完全グラフの標準的グラフを決定する手法として小林一章氏によりグラフの本表現が Hamilton 道を基準とする埋め込みとして定義されている. 論文 [1] において 本表現の可能性を示す H-path book presentability(小林 1993), Bohme(1990) により定義されたグラフの内部構造の単純さを測る指標となる strongly discatenability について考察し, 一般に上記 2 つの性質は同値ではないが, 完全 n 部グラフに対してはこれら 2 つが同値となることを示し, 完全 n 部グラフがそれらの性質を持つ必要十分条件を与えた.

Casson 不変量は A.Casson(1985) により定義された整係数ホモロジー球面の整数値不変量であり, その基本群から $SU(2)$ への表現を用いて導入されたが, またその 3 次元多様体の手術表示における枠付き絡み目の Alexander 多項式の関数としても定義されている. 3 次元多様体の量子不変量の位相的性質は, 特定の値についての結果しか知られていないが, 唯一の例外が Casson 不変量である. C.Lescop(1998) により, Casson 不変量が 0 である任意の整係数ホモロジー球面は S^3 内の 各成分の Alexander 多項式が 1 である境界絡み目に沿った手術により得られることが示された. 幾何的手法により以下の結果を論文 [3] にまとめた. 同相な 3 次元多様体の表示は S^3 内の枠付き絡み目に対する Kirby 移動 I,II により関係付けられているが, この表示の幾何的考察により Lescop の結果を拡張し, 任意の整係数ホモロジー球面 H に対して 整数 k が存在して, H は S^3 内の各成分の Alexander 多項式が $1+k(t^{1/2}-t^{-1/2})^2$ となる境界絡み目に沿った (±1) 手術により得られることを示した.

新しい結び目不変量の開発は盛んに行われているが, 未だ有効な完全不変量が発見されておらず, 既存の結び目不変量について精度を調べ 不変量の障害となる結び目の集合を探すことは一つの大きなテーマとなっている. 結び目の 2 タングルにおける局所変形「ミューテーション」により得られる結び目たちが, スケイン多項式不変量に関し大きな障害になることはよく知られている. ミューテーションの一つの一般化である「ローテーション」は n 対称性をもつ n タングルにおける局所変形操作であるが, ミューテーションでは不変量の値が保存され無効となる多項式不変量について, ローテーションでは有効となるものがあることが 1989 年前後に Anstee, Rolfsen, Przytycki, Jin により示されている. アレクサンダー多項式は他のスケイン多項式不変量とは異なり, ザイフェルト曲面を用いても定義されている.「アレクサンダー多項式がローテーションにより不変である」という予想は 10 年余り未解決であったが, 2001 年に Tracyk により n タングルの向きに制限を与えた場合は予想が正しいという部分解答が示された. 論文 [5] において, 上記の制限をはずした場合ローテーションは Alexander 多項式を保存しないことを示し, 先の予想の否定的解答を与えた. また, Traczyk の手法を用いて, 結び目の村杉符号数, タングルの向きに制限を与えた場合には Tristram-Levine 符号数 がローテーションにより不変であることを示した.

上記の考察に重要な役割を果たしたのがザイフェルト曲面であり, 次の被覆空間を構成する議論に関しても disk-band 表示というザイフェルト曲面を定義し張ることにより, 構成を可能にした.

タングルに関するもう一つの考察として, Akbulut-Kirby の結び目に関する分岐被覆空間の構成法のタングルへの適用を試みた. 実際, タングル上で分岐する 3 次元球体の有限巡回分岐被覆空間を直接構成し, 構成した有限巡回被覆空間の手術表示やヘガード分解を表現するアルゴリズムを論文 [4] で与えている.

ザイフェルト曲面については, それ自身を幾何的に考察することも重要な研究テーマである. 9 交点以下の素な絡み目について 最小種数ザイフェルト曲面をリストした. また小林毅氏と垣水氏の議論を適用して, 3 本柱のプレッツエル絡み目の張る非圧縮ザイフェルト曲面の分類を行い, 論文 [6] にまとめた.