今後の研究計画

黒木慎太郎

近い将来は次の三つを重点的に研究していきたいと思っています。

- 問「（擬）トーリック多様体はコホモロジー環構造でその微分位相型が決まるか？」の周辺。
- (M^{4n}, T^{n+1}) なるクラスの定式化とそのトーリックトポロジー的研究。
- 古典的な幾何学の理論のグラフへの翻訳とその応用。

いずれもトーリックトポロジーに入る問題です。

一番目の研究の動機は Masuda の定理「（擬）トーリック多様体 (M^{2n}, T^n) はその同変コホモロジー $H_T^*(M)$ の $H_T^*(pt)$ 代数の構造が同変微分同相型を完全に決定する」にあります。この結果から最初の問いの答えは Yes のようにも見えますが、まだよくわからないのが本当のところだと思います（反例が見つかったらそれも非常に面白いと思います）。最初の実験として論文 (5) に出てきた多様体達をもう少し深く研究してみたいと思っています。例えば微分同相型の分類や、微分同相写像とコホモロジー環 $H^*(M)$ の間の同型写像の関係等についてです。推移的な場合は多様体の直積で面白くないので、余次元一の主軌道を持つ場合に出てきた多様体達について考えて見ます。トーリック多様体の微分同相型の分類については KAIST の Choi さんの complexity one Bott tower の分類の研究が応用できて肯定的に解決しそうな感じなのでトーリック多様体の微分同相写像と $H^*(M)$ の同型写像の関係について特に考察してみたいと思っています。もちろんもっと広いトーラス多様体の範囲で出てきているのでそれら全てに関して研究したいと思います。トーラス多様体の微分同相写像とコホモロジー環の同型写像の関係の研究からトーリックトポロジーの新しい側面が見えてくることを期待しています。最終的には Masuda の問題を解くことを目標において研究していきたいと思います。この問題が解ければトーリックトポロジーにおける (M^{2n}, T^n) なるクラス（トーラス多様体がこのクラスになります）の理解が相当進むことになるわけです。

二番目の研究はトーリックトポロジーにおいて (M^{2n}, T^n) なるクラスの次に研究するべきクラスを探し出してきちんと定式化することです。つまり何かトーラス作用つきの組 (M^{2m}, T^n)（$m > n$）で組み合わせ的に面白い構造を持つようなクラスを探し出すことを目指します。トーラス多様体（トーリック多様体）についでトーリックトポロジーで研究されているクラスは論文 (4) のところでも出てきたハイパートーリックだと思います。これは先の書き方をすれば (M^{4n}, T^{n+1}) なるクラスに入り、ハイパートーリックから定義される超平面配置の組み合わせ構造によって同変コホモロジー環を記述できます。ここから出てくるグラフを抽象化してハイパートーラスグラフを定義したわけですが、このグラフのクラスは他にも面白い多様体から出きるグラフを含んでいます。例えば $S^4 \times \mathbb{C}^2$ や $\mathbb{H}P(n)$, Q_{2n} 等から出てくるグラフを含んでいます。つまり、それらがハイパートーラスグラフによってある意味、結び付けられたわけですが、このクラスを幾何的にきちんと定義してやろうと言うのが最初の目標になります。そして、（ハイパートーラスグラフ以外に）どの組み合わせ的な構造と対応させるのが自然なのかを研究しようと思っています。あるトーラス多様体は角付き多様体（擬トーリック多様体ならば凸多面体、角付き多様体はその一般化と思えます）の組み合わせ構造からその同変コホモロジー環が計算できました。ハイパートリックの場合は超平面配置です。よってこの研究から定義されるクラスは、超平面配置（マトロイドとして記述すべきなのかも知れませんが）を一般化したような組み合わせ的なものと対応すると予想しています。また、この研究を通してトーラス多様体の四元数化とはどのようなものになるのかも合わせて研究していきたいと思います。

三つ目の研究は現段階ではどのようなものが待っているのかよくわからない物です（面白い物が待っているかもしれないし、徒労に終わるかもしれないものです）。動機は、Guillemin-Zara（GZ）のシンプレクティック幾何のグラフへの翻訳と論文 (4) で定義したハイパートーラスグラフは GKM グラフの接バンドルに当たるものと思うことができると言うところにあります。接バンドルと思うことによってグラフの上に翻訳できる幾何的な理論がたくさんあると思いますし、GZ のようにそう思わなくてもたくさんあると思っています。簡単に作れそうなところだと、コボルディズム論がグラフの上で展開できそうです。最初は単なる翻訳作業で面白い数学は何も出てこないかもしれませんが、GZ は最後に組み合わせ論への応用を見つけてきました。そういうものが思わぬところで出てくるかもしれないと言う期待がこの研究にはあります。また、翻訳作業から見えてくることもあるかもしれないのでやっていきたい研究です。

以上の三つ Masuda の問題とトーラス多様体の四元数化とグラフへの翻訳が現在トーリックトポロジーにおいて中心となる問題だと思っているのでこれらをキチンと解決していきたいと思います。