これまでの研究成果のまとめ

黒木慎太郎

現在まで多様体上の変換群を位相幾何的な視点から研究してきました。大きく分けると以下にある三つの研究に分類できます。書いてある番号は「List of My Papers」の「1.Papers」にある番号に対応しています。

0.1. **コンパクトリー群の作用の分類.** (2) において有理コホモロジー複素二次超曲面（有理数係数コホモロジー環が Q_{2n} と同型になるような多様体）上に余次元一の作用を持って働くコンパクトリー群とその多様体の位相型の分類をしました。分類するために 1978 年 F.Uchida によって導入された方法を用いました。結果として、位相型が Q_{2n} とは異なるような多様体が一つ出てきました。また、2002 年に A.Kollross が G/H に対する G の部分群 K が余次元一の主軌道を持って作用する場合の分類を行っていますが、G/H が Q_{2n} と同相の時に彼の研究では得られないような群作用が一つ出てきました。また一般の複素二次超曲面 Q_n と複素射影空間 $\mathbb{C}P(n)$ の間には $\mathbb{C}P(n) \cong Q_n/\mathbb{Z}_2$ なる関係があることも群作用の軌道を比べることでわかりました（簡単なことですが Uchida の方法の一つの応用と言えます）。この論文の中で数多くの興味深い変換群の例も作りました。

0.2. **非コンパクトリー群の可微分作用.** (1) において、$S^{4(m+n)-1}$ 上の、可微分（C^∞）な $SL(m,\mathbb{H})\times SL(n,\mathbb{H})$ 作用を $\mathbb{R}^2$ の S^7 上への作用をベクトル場を用いて構成することにより、非可算無限個の異なる C^∞ 級作用を構成しました。

(3) において、$SL(3,\mathbb{R})$ の 4 次元球面への連続な作用で制限 $SO(3)$ 作用が共役作用になるようなものを $\mathbb{C}P(2)$ を複素共役写像で割れば 4 次元球面になる事実を用いて構成しました。その際に先に述べた Uchida の方法を応用することで $\mathbb{C}P(2)/\mathrm{conj} \simeq S^4$ の直接の証明も与えました。

0.3. **トーリックトポロジー.** トーリックトポロジーとはトーラス作用の軌道空間が良い構造を持つ場合に、その作用の代数的な、組み合わせ的な、解析的な、幾何的な、そしてホモトピー論的な側面を研究することの総称のことです。

(4) はその組み合わせ的な側面の研究に当たります。ハイパートーラスグラフ（HTG）と言う新しい GKM グラフに類似したグラフのクラスを定義し、そのグラフの同変コホモロジー環構造を研究しました。HTG はハイパートーリックやトーリック多様体の余接バンドルの軌道空間から定義されるグラフを抽象化したものです。今まで研究されてきた GKM グラフとは異なり頂点をつなぐ辺だけでなく足（頂点から延びる半直線）を持つことがこのグラフの特徴です。足をつけたことでグラフに対して幾何的なアイデアを使えるようになります。例えば GKM グラフの各頂点に足をつけることで GKM グラフのベクターバンドルが定義できますし、部分グラフに対しての近傍と言うものも考えることも可能です。実際グラフの同変コホモロジーの Mayer-Vietoris 完全系列が定義できて応用できます。この論文では、ある場合の HTG のグラフの同変コホモロジー環がその組み合わせ構造から定義される環と同型になることを示しました。

(5) はトーリックトポロジーの幾何的な（変換群論的な）側面の研究に当たります。この研究は 0.1 の研究にも当たります。トーラス多様体 (M^{2n}, T^n) 上に推移的または、余次元一の主軌道を持って作用する rank n のコンパクトリー群 G とトーラス多様体 M の作用 (M, G) の分類を行いました。トーラス多様体とは 2003 年に Hattori-Masuda によって定義された、多様体の半分次元のトーラス T^n が効果的に作用している多様体のことです。この多様体はトーリックトポロジーの中で、現在最も盛んに研究されているクラスです。推移的な場合は、コンパクトリー群の分類の結果を用いることにより、出てくる多様体が $\mathbb{C}P(n)$ と偶数次元の球面 S^{2m} の直積のみになることがわかりました。余次元一の主軌道を持つ場合は Uchida の方法を用いることで、$\mathbb{C}P(n)$ と S^{2m} の直積上の $\mathbb{C}P(k)$（または S^{2l}）バンドルのみになることがわかりました。また余次元一の場合にこの研究が論文 (2) の研究と異なる点は、トーラス多様体という多様体の族を考えていることにあります（論文 (2) の場合はコホモロジー環を固定していました）。よって Uchida の分類方法は、コホモロジー環を固定する以外にもある種の多様体の族を考えた場合にも有効になると言うことがわかりました。