研究計画

新庄玲子

従来, 結び目理論においては, 考えている幾何学的状況下で変わらない量を見出すことが中心的な課題とされてきた．論文 [1][2] で与えた空間グラフの局所変形がなす同値関係による分類は, その局所変形によって不変な量 (不変量) を用いたものである．しかし, 不変量はその幾何的状況に関する情報のみでなく, その他の情報も保持していると考えられる．本研究では, それらを抽出するため, 不変量の値を変える局所変形と, それで関係付けられる幾何的対象に着目し, 生じた変化の度合いを考察することで不変量の保持する情報を掘り下げて捉え, それを大域的な問題に応用していくことを考える．組み紐の Markov 分類を与える手がかりになると思われる, 組み紐の exchange 分類を与えることを目指し, 以下を計画している:

(1) 同じ結び目を閉包をとして持つ互いに共役でない組み紐の無限列の構成

J. S. Birman-W. W. Menasco により, 同じ絡み目 (結び目も含む) を閉包として持つ, 互いに共役でない n 次の組み紐の無限列が存在するならば, それらは exchange 変形のなす同値関係のもと, 有限個の類に類別されることが示されている．すでに自明な結び目 (もしくは $(2,p)$-トーラス絡み目) に対しては, exchange 変形により 1 つの類に類別される, 互いに共役でない 4 次の組み紐の無限列が構成されている．このことから, 全ての絡み目が, このような無限列を持つならば, その中での exchange 変形の振る舞い, 例えば組み紐の共役不変量や軸添加絡み目の結び目不変量の値をどのように変化させるか, 無限列を含むクラスがいくつできるか等を調べることにより, 組み紐の幾何的情報の抽出を試みることは問題解決の手がかりとなると考え, このような無限列の構成に取り組み, 新たな無限列を構成することができた (論文 [4][6][7]) その際, 既存の構成法の拡張を考え, 無限列の存在が知られていなかった絡み目に対して Morton の構成法をもとに無限列を構成し, その列内の組み紐から得られる軸添加絡み目のコンウェイ多項式を実験的に求め, それを考察することから始めた．そしてそのコンウェイ多項式の係数に規則性があることを見出し, 組み紐から構成される軸添加絡み目のコンウェイ多項式の係数の差を評価することで, それらの組み紐が互いに共役でないことを示すという手法を導入し, 結果を得ることができた．既存の手法が絡み目に対応する組み紐の ‘語’ から求める共役不変量を使用していたのに対し, 新たに組み紐の軸添加絡み目がデルタ変形で関係付けられることから, その変形により生じる不変量の差を, 軸添加絡み目の一部分を考察することにより評価するという手法を導入した．この手法の利点は多数の結び目について同時に議論できる点にある．また, この手法に用いることのできる結び目の局所変形と不変量は他にもあると考えられるので, それらを見出すことができれば, 異なる系列の無限列の構成が可能になると思われる．既に構成した無限列の組み紐に対応する軸添加絡み目に関して, Kodama Knot プログラムなど用い, 実験的に他の不変量を求め, それを考察することにより, 他に利用できる不変量を見つけたい．また, 構成した無限列に関しては, exchange 変形が組み紐の共役不変量に及ぼす影響, 軸添加絡み目の絡み目不変量に及ぼす影響などの考察を行い, これらの組み紐の幾何的性質の解明に臨み, 組み紐の exchange 変形がなす同値関係による分類の手がかりを得たい．

(2) 組み紐の既約性の証明方法の確立

H. R. Morton は自明な結び目を閉包として持つ既約な組み紐の例を初めて与えており, T. Fiedler はそれを利用して自明な結び目を表す既約な 4 次の組み紐の無限列を与えている．しかし, 一般には組み紐の既約性の証明は困難である．実際, 彼らの用いた既約性の証明は 4 次の組み紐に限定されており, 一般の次数への拡張は知られていない．[4] においては, [7] で導入した手法を応用して Fiedler の与えた無限列の一般化を試み, ある条件を満たす結び目に対して, その結び目の組み紐次数と同じ次数の組み紐で無限列を構成することができた．この無限列内の組み紐は, 結び目の組み紐指数を実現していることから既約であることが従う．つまり ‘既約な組み紐の無限列’ という点では, Fiedler 与えた無限列の拡張と言えるものになっている．しかし, 彼らが自明な結び目, つまり 1 次の組み紐で表すことができる結び目を, 4 まで次数を上げて表し, その次数は共役の範囲では非安定化を用いても下げることができないことを主張しているという点では大きく異なっている．よって, Fiedler の用いた判定法の拡張と言える, 最小性を保持していない組み紐に対しても用いることのできる既約性の判定手段を確立したい．安定化や非安定化の共役類への影響を明らかにするためにも, 既約な組み紐の考察は非常に重要であると考えられる．解決に有効な手法は見つかっていないが, 問題自体は非常にシンプルで, 幾何的にも捉えやすい問題であるので無限列の構成の問題と同様に, 結び目理論の観点からの解決を試みる．