研究成果

新庄玲子

論文 [1] では, 空間グラフの空間グラフホモロジー分類を与えた．この分類は Wu 不変量を用いて K. Taniyma によりすでになされていたが, ここではグラフの空間埋め込みの Wu 不変量が，2 つの 1 次元球面の非交和，5 頂点完全グラフ, もしくは 3-3 頂点完全二部グラフに同相な部分グラフに対応する部分空間グラフの絡み数と Simon 不変量のみで決定されるということを示した．絡み数と Simon 不変量はともに空間グラフの正則図から簡単に計算可能なので，空間グラフの空間グラフホモロジー分類が簡単な計算で与えられることになった．さらに T. Motohashi-Taniyama が, グラフの二つ空間埋め込みが空間グラフホモロガスであることとデルタ変形で移りあうことは同値であることを, Taniyama-A. Yasuhara が, グラフの 2 つの空間埋め込みがデルタ変形で移りあうならば，それらの次数 1 の有限型不変量は一致するということを示していることから，グラフの空間埋め込みの次数 1 の有限型不変量が絡み数と Simon 不変量によって決定されるということも分かった.

グラフの空間埋め込みに含まれるグラフの 1 次元ホモロジー群の基底に対応する結び目に, 互いに内部が交わらない円板が張ることができるとき, その埋め込みは局所自明であるといわれる．この概念は K. Kobayashi によって提唱されたにものである．この概念に着想を得て，論文 [3] において, グラフの空間埋め込み (空間グラフ) の a collection of spanning surfaces(以下 spanning surfaces とする) という概念を導入した．空間グラフの spanning surfaces とは，空間グラフに含まれる結び目に張られた異なる境界を持つ, 互いに内部の交わらない, 連結でコンパクトな向き付け可能曲面の集合のことである．特に各曲面が円板と同相なとき spanning disks という．T. Endo-T. Otsuki によって, 全てのグラフは局所自明空間埋め込みを持つことが示されている．一般にはグラフの 1 次元ベッチ数は, その任意の空間埋め込みに張られる spanning surfaces の枚数の上限にはなっていないので, その上限を与えることを試み, 全てのグラフの任意の空間埋め込みに張ることができる spanning surfaces の枚数は, グラフのブロック分解の各成分の 1 次元ベッチ数から決まる値で上から評価できることを示した．さらにそれが上限となることを, 任意のグラフに対し, その値を円板で実現する空間埋め込みを与えることによって示した.

論文 [2] にでは, 境界絡み目の概念を拡張して, 含まれる全ての結び目に対応する spanning surfaces が存在するグラフの空間埋め込みを境界空間埋め込みと定義し，それに関する研究を行った．全てのグラフに対し境界空間埋め込みが存在するのではないことが [3] で与えた評価式より分かる．よって, まず境界空間埋め込みを持つグラフの完全な特徴づけを行った．次にグラフの境界空間埋め込みの幾何的な性質について考察し, 境界空間埋め込みの自己パス変形による分類を与え, さらに与えられたグラフの任意の二つの境界空間埋め込みが自己シャープ変形と呼ばれる局所変形によって互いに移り合うことを示した．これらの結果は L. Cervantes-R. A. Fenn と T. Shibuya によって与えられている境界絡み目に関する結果の自然な拡張となっている.

論文 [4][6][7] においては, 結び目理論の手法を用い, 組み紐に関する結果を得ることができた．J. S. Birman-W. W. Menasco の 3 次の組み紐の分類定理により, n が $1, 2, 3$ のいずれかのときは n 次の組み紐の閉包として表される絡み目に対し, その絡み目を閉包として持つ n 次の組み紐の共役類は高々3 つであるということが知られている. しかし, 4 次以上の組み紐に関しては状況は異なっており, 自明な結び目, $(2, p)$-トーラス絡み目 ($p \geq 2$) を閉包として持つ互いに共役でない 4 次の組み紐の無限列が構成されていた．この無限列の一般化を試み, [6][7] では, n 次の組み紐 ($n \geq 3$) の閉包として表すことのできる結び目 (もしくはある条件を満たす絡み目) に関しては, その結び目と同じ閉包を持つ互いに共役でない $(n+1)$ 次の組み紐の無限列が構成できることを示した. [4] においては, Fiedler が構成した自明な結び目を表す既約な 4 次の組み紐の無限列の一般化を試み, ある条件を満たす結び目に対し, そのような無限列を構成することができた．しかし, 一般の次数に Fiedler の判定法を拡張することは困難であり, 結び目の組み紐指数を利用して規約性を判定するに留まっている. 構成法自体は既存の手法を利用したが, 構成した無限列内の組み紐が互いに共役ではないことの証明は異なる. 既存の手法が 4 次の組み紐群から 3 次の組み紐群への準同型や, 組み紐の語から共役不変量を求めるものであったのに対し, 今回導入した手法は組み紐から構成される軸添加絡み目（組紐の閉包と軸に対応する成分から構成される絡み目）のコンウェイ多項式の係数の差を絡み数を用いて評価するという結び目理論の観点からの手法を用いており, より簡単な計算で結果を得ることができる.