

## これまでの研究成果

山本 亮介

任意の有向閉 3 次元多様体  $M$  には必ずファイバー結び目 (絡み目) が存在し、 $M$  をファイバー結び目 (絡み目) の近傍と円周上の曲面束とに分解できる。これを  $M$  のオープンブック分解と呼ぶ。 $M$  のオープンブック分解の構造の研究は、そのファイバー曲面の構造によって記述するという視点から様々になされて来た。中でも村杉和と呼ばれる曲面同士の結合方法の重要性が Gabai により明かにされている。例えば、2 つの曲面  $R_1, R_2$  の村杉和  $R$  がファイバー曲面であるのは、 $R_1, R_2$  が共にファイバー曲面であるときで、この逆も成り立つ。

私は、 $S^3$  のオープンブック分解をそのファイバー曲面の村杉和に関する構造によって記述しようという観点に立ち、以下の研究成果を得ている。

- ホップバンド (1 回捻られたアニュラス) は、円盤を除けば  $S^3$  内の最も単純なファイバー曲面である。よって、ホップバンドをいくつか村杉和して得られるファイバー曲面 (これをホップブラミングと呼ぶ) は、村杉和に関して基本的な構造を持つと言えるが、 $S^3$  内のファイバー交代絡み目のファイバー曲面は必ずホップブラミングであることが、村杉和により示されている。そこで、東京農工大の合田氏、学習院大の平沢氏と共同で、この事実の拡張し、以下の結果を得た。

“概交代絡み目が持つ概交代ダイアグラムにザイフェルトのアルゴリズムを適用して得られるザイフェルト曲面がファイバー曲面であるための必要十分条件は、その曲面がホップブラミングであることである。”

- Harer により、“3 次元球面内の任意のファイバー曲面は、(1) ホップバンドを村杉和する、(2) ホップバンドを取り去る [(1) の逆操作]、(3) Stallings twist を施す、という 3 つの操作によって円盤から構成される” ことが示されている。さらに彼は、“操作 (3) は不要” と予想した。ファイバー曲面  $\Sigma$  に対する Stallings twist という操作は、 $\Sigma$  上の閉曲線  $c$  で  $S^3$  内にある種の disk を張るものに沿っての Dehn twist として定められる。 $c$  が張る disk と  $\Sigma$  との交わりの連結成分の最小数をその Stallings twist の複雑度と定めるとき、Harer 予想の部分的な肯定的解答を次のように得た。

“複雑度 1 の Stallings twist は、操作 (1) と (2) を 1 回ずつにより実現される。”

$M$  を向き付けられた閉 3 次元多様体とする。 $M$  のオープンブック分解に対し、そのファイバー曲面に正捻りホップバンドを村杉和すると、 $M$  の新たなオープンブック分解を得る。これをオープンブック分解の正の安定化と呼ぶ。Giroux により、 $M$  の全てのオープンブック分解の集合の正の安定化による同値類と、 $M$  の全ての正の接触構造 (の同型類) との間の 1 対 1 対応が示された。そして主にこの対応から、上記の Harer 予想がホモロジー球面について正しい事が示された。

- この 1 対 1 対応においてファイバー曲面上の Stallings twist の為す役割について研究し、それが *overtwisted* と呼ばれる接触構造に対応するオープンブック分解 (これを *overtwisted* オープンブック分解と呼ぶ) を特徴付ける事を発見した。すなわち、以下を示した。

“与えられたオープンブック分解が *overtwisted* オープンブック分解であるための必要十分条件は、それが Stallings twist を許容するオープンブック分解と正の安定化のもと同値であること。”

- さらに、この *overtwisted* 性と Stallings twist の存在との関係を利用し、以下を示した。

“与えられたオープンブック分解が *overtwisted* オープンブック分解であるための必要十分条件は、それが Stallings twist を許容するオープンブック分解と正の安定化のもと同値であること。”

奈良女子大学 (学振 PD) の斎藤氏との共同研究において、ファイバー曲面上に本質的に埋め込まれた arc の isotopy 類が成す arc complex という対象を用いてオープンブック分解の translation distance と呼ぶ、ある種の複雑度を定義し、以下を示した。

“村杉和により得られたオープンブック分解の複雑度は 2 以下。また、Stallings twist を許容するオープンブック分解の複雑度は 3 以下。”