これまでの研究成果

(文献の番号は論文リストにある番号と一致する)

石坂瑞穂

種数 g の代数曲線の退化とは, 2 次元複素多様体 S から複素平面上の小さな円板 $\Delta := \{t \in \mathbf{C} | |t| < \varepsilon\}$ への全射正則写像 $f\colon S \to \Delta$ で, 一般ファイバー $f^{-1}(t)$ $(t \in \Delta \setminus \{0\})$ が種数 g の代数曲線（リーマン面）Σ_g となるものをいう. $f^{-1}(0)$ を特異ファイバーとよぶ. 一般ファイバーが超楕円曲線の退化を超楕円的退化と呼ぶ. これまでの研究では代数曲線の退化を代数幾何学的手法と, 位相モノドロミーなどの位相幾何学的手法の両方を駆使して研究し, それぞれの分野の手法のみでは得られない結果を得ている.

論文 [5] では, $g = 3$ である場合の位相モノドロミーの分類を, 安定還元の形や特異ファイバーの形を含めて分類している (約 1600 種類). $g = 1, 2$(小平, 上野-浪川) とは異なる手法を使い, 高種数の場合にも応用できるように分類のアルゴリズムを提示している.

論文 [4] では, 「一般ファイバーの複素構造が位相モノドロミーにどのような制限を加えているか」を動機に, 種数 3 の超楕円的退化の位相モノドロミーを完全に分類し (約 800 種類), 分類されたモノドロミーを持つ超楕円的退化の構成も, その定義方程式を与えることにより行なった. また、この研究では従来無視されがちであったスクリュー数が重要な役割をしており, 超楕円的退化のモノドロミーになる条件に大きな影響を与えることが明らかとなった.

論文 [3] では, 超楕円的退化の周期的モノドロミーを, 一般の種数において分類した. [3] の技術を応用し､「Hyperelliptic Involution と可換な位相モノドロミーは超楕円的退化の位相モノドロミーになりうる」という予想の部分的解決, つまり, 「Hyperelliptic Involution と可換な半安定位相モノドロミーは超楕円的退化の位相モノドロミーになりうる」ことを代数幾何学の手法を用いて肯定的に解決した [2]. この結果は, 位相幾何学的手法だけでは難しく, 代数幾何学的手法が生かされた研究の一つといえる.

退化の「分裂変形」を利用し, 写像類群の元を Dehn ねじりの積として表す研究が松本幸夫氏等により行なわれている. 「写像類群の元が Dhen ねじりの積として表せる」ことは古典的結果であるが, 写像類群の元が勝手に与えられたとき, それを Dehn ねじりの積で書くアルゴリズムは一般には未だない. 応募者の研究 [7] により「種数が一般で, 超楕円的かつ周期的な写像類群の元を Dehn ねじりの積で表すアルゴリズム」が得られた.

また, 『「分裂族」から得られる位相モノドロミーの「Dehn ねじりの積による表示」は, その位相モノドロミーの Dehn ねじりの積による最短表示である』という Cadavid 予想の反例をつくることに成功した [1]. この反例は 「分裂族」という幾何学的対象と「写像類群の表示」という代数的問題の間にある, ある種のギャップをはっきりさせた例といえる.