研究計画

木村太郎

リーマン対称空間の研究において, そのホモロジー類で体積最小となる全測地的部分多様体のクラスをみつけることは重要である. 体積最小となる全測地的部分多様体は, 安定な全測地的部分多様体となり幾何学的変分問題の観点からも興味深い対象となる.

一方, 対称 R 空間は, エルミート対称空間の極大全実, 全測地的部分多様体として定義される. 対称 R 空間は様々な良い構造を持つことが知られており, その性質を特徴付けることは基本的な問題である.

これらをふまえて, 今後の研究対象は以下の 3 つを考えている.

1. 対称空間とキャリブレート幾何学

Harvey–Lawson は, 最小質量をもつカレントの研究として, キャリブレート幾何学を確立した. キャリブレートされた部分多様体は安定な極小部分多様体であるという点で, この理論は極小部分多様体の理論と関連がある. ある種のコンパクト対称空間における Helgason 球面や, エルミート対称空間のエルミート部分空間, 四元数ケーラー対称空間の四元数ケーラー部分空間などはキャリブレートされた部分多様体であることが知られている. 我々は, 論文 [2] で決定した階数 2 の対称空間の安定な極大全測地的部分多様体にキャリブレーションの構成を試み, また, 論文 [3] で決定した cohomogeneity one action から決まる, ある種の安定な鏡映部分多様体に対してもキャリブレーションの構成を試みる.

2. 対称 R 空間

対称 R 空間は特別な幾何的構造を持つことが知られている. 対称 R 空間は, 代数的観点からは第 1 種階別 Lie 代数の構造と関係する. また対称 R 空間上のツイスター空間は階別 Lie 代数より得られる. このことをふまえ, 対称 R 空間上のツイスター空間を研究対象として, 小林–長野の結果である階別 Lie 代数による対称 R 空間の構造の特徴付けをふまえ, 対称 R 空間に付随したある種の等質空間を階別 Lie 代数により構成する. そして, それらの等質空間のクラスに共通する幾何学的構造を調べる.

3. 積分幾何学と体積最小性

R. Howard によって与えられたリーマン等質空間における一般化された Poincaré の公式は, 体積最小となる部分多様体の決定に必要と考える. 初めに, 実空間形と複素空間形の部分多様体に対して一般化された Poincaré の公式を理解する. 次に, [2] と [3] で得られた安定な全測地的部分多様体を対象として, Poincaré の公式を応用してその体積最小性を示す.