研究計画

宮内敏行

Whitehead 積と Hopf 不変量による自己ホモトピー集合の構造と L-S カテゴリの研究を計画している。

自己ホモトピー集合において対象が懸垂された空間のとき、懸垂による積で群の構造を持ち、それによる群構造の決定をこれまでの研究で行ってきた。自己ホモトピー集合においてはこの積の他に、写像の合成によるの積が考えられる。この 2 つの積による構造を入れたとき、一般には右分配法則が成り立たないため環にはならない。上記の 2 つの積による構造の記述方法として H. J. Baues 氏、 M. Hartl 氏、T. Pirashvili 氏らによる Square ring というものがある。環でなくても Square ring 上の加群というものが定義でき、他のホモトピー集合をその加群として見ることにより、ホモトピー集合の構造をより深く研究できると考えている。しかし、Square ring の定義や扱いの複雑さからあまり研究がなされていなく、Square ring 構造が決定されているのは、胞体の数が少ない CW-複体くらいしかない。そこで $[\Sigma^k \mathrm{P}^n, \Sigma^k \mathrm{P}^n]$ の Square ring 構造を研究することで、この 2 つの積による構造をより深く調べれると考えている。$[\Sigma^k \mathrm{P}^n, \Sigma^k \mathrm{P}^n]$ は $k \geq n$ で環になることが、Freudenthal の懸垂定理により知られている。Square ring 構造は Whitehead 積と Hopf 不変量が深く関わっており、$k \geq n$ のときは Whitehead 積と Hopf 不変量が共に消えているという自明な Square ring 構造を持っている。これまでの研究により $k < n$ においても環構造を持つが、Square ring としての構造は、$k \geq n$ のときと違っている場合あることがわかった。これは Whitehead 積と Hopf 不変量のどちらかが消えてないためによるものである。しかし、今のところ構造を決定できたものが少なく Square ring 構造を持つかどうかもわからない場合が多くある。そこで Whitehead 積と Hopf 不変量を一般論も含めより深く研究することで $[\Sigma^k \mathrm{P}^n, \Sigma^k \mathrm{P}^n]$ の構造を決定し、懸垂の数を増やすことによる構造の変化を見ることで、自己ホモトピー集合の構造が環に“ 近づく ”様子が観察できると考えている。また、$[\Sigma^k \mathrm{P}^n, \Sigma^k \mathrm{P}^n]$ の例や他の空間についても自己ホモトピー集合の構造を調べることで、Square ring にならないものに対しての構造の記述や、Square ring と環との間の構造を表す記述を与えることを考えている。

L-S カテゴリの研究においては、SO(10) の L-S カテゴリ数を決定した評価方法を拡張することをまず行う。この評価方法の証明では積空間の接着空間としての構造を用いた。そのときに重要であったのは接着写像の性質であり、この接着写像は Whitehead 積を用いて表される。また、この評価方法が用いれるかどうかの条件の一つは Hopf 不変量によるものである。そのため、L-S カテゴリの研究においても Whitehead 積と Hopf 不変量を研究することで、SO(10) で用いた評価方法をうまく修正し Stiefel 多様体などの等質空間で、L-S カテゴリ数が未決定なものに対して応用することを考えている。この評価方法は L-S カテゴリ数の上からの評価しか与えれないため、新たな評価方法を含むその他の L-S カテゴリ数を評価するホモトピー不変量の研究も行うことを考えている。