研究成果

宮内敏行

私の研究分野は代数的位相幾何学、特にホモトピー論で、これまで自己ホモトピー集合についての研究と、L-S カテゴリの研究を行った。

ホモトピー論での基本的な問題として、m 次元球面から n 次元球面へのホモトピー集合 $[S^m, S^n] = \pi_m(S^n)$ の群構造を決定するという問題があり、H. Toda、M. Mimura、M. Mahowald、 N. Oda などにより多くの結果が得られている。球面の次に重要な空間のひとつとして n 次元実射影空間 P^n があり、懸垂した実射影空間についてのホモトピー集合 $[\Sigma^k \mathrm{P}^m, \Sigma^l \mathrm{P}^n]$ の群構造を決定することを目標とし、球面のホモトピー群においては、$\pi_n(S^n) = \mathbf{Z}$ に対応する自己ホモトピー集合 $[\Sigma^k \mathrm{P}^n, \Sigma^k \mathrm{P}^n]$ の群構造について研究をした。$[\Sigma^k \mathrm{P}^n, \Sigma^k \mathrm{P}^n]$ の群構造について結果としては、$k = 1$、$n \leq 4$ については信州大学の向井純夫氏により群構造が決定されており、私は向井純夫氏との共同研究において $k = 2$ のときの研究を行い、球面のホモトピー群の情報、Toda bracket、Whitehead product の性質や Steenrod 作用素などを用いて $n \leq 6$ のときの群構造を決定した [1]。またその延長として実射影空間の部分空間であるより次元の低い実射影空間を、１点に潰す写像のホモトピーファイバーの CW-複体としての構造を研究することで $[\Sigma^2 \mathrm{P}^7, \Sigma^2 \mathrm{P}^7]$ の群構造を決定した [2]。$[\Sigma \mathrm{P}^n, \Sigma \mathrm{P}^n]$ は懸垂の数が一回のため一般には可換群ではなく、$[\Sigma \mathrm{P}^5, \Sigma \mathrm{P}^5]$ についてその可換性が問題になり、群構造が決定できていなかったが、可換群であることが証明できその群構造を決定した [5]。また同じ論文にて $[\Sigma \mathrm{P}^6, \Sigma \mathrm{P}^6]$ の群構造は決定できていないが、可換群であることを証明した。

L-S カテゴリ数は Lusternik と Schnirelmann によって 1934 年に定義されたホモトピー不変量で、多様体上の滑らかな実関数の特異点の個数の下限を与える自然数である。L-S カテゴリ数の定義は、『対象となる空間を覆うことのできる可縮な開集合による被覆の元の個数の最小数から１引いた数』という単純なものだが、その数を直接決定するのは、可縮である空間（L-S カテゴリ数は０）や球面（L-S カテゴリ数は１）のような簡単な空間を除けばとても困難なものが多い。九州大学の岩瀬則夫氏との共同研究 [3] において四元数準射影空間 Q_n の中でその部分空間である、より次元の低い四元数準射影空間を 1 点に潰した空間の L-S カテゴリ数が３になるときの条件を与えた。この結果のひとつとして３次元四元数準射影空間 Q_3 の L-S カテゴリ数が３であることを証明した。Q_3 は CW-複体としては胞体が３つしかない単純な構造であるが、L-S カテゴリ数は決定されていなかった。この研究方法は“値をホモトピー類にもつ Hopf 不変量”と“一般コホモロジー論上でのカップ積”との関係を調べ、L-S カテゴリ数を評価できるホモトピー不変量である『cup-length』を用いる方法を取った。また、岩瀬則夫氏と九州大学の菊地佳意氏との共同研究 [4] において、１０次元の回転群 SO(10) の L-S カテゴリ数を決定した。その方法は主バンドルにおいて、構造群の積と L-S カテゴリ数による全空間の L-S カテゴリ数の評価方法を新たに開発し、それを構造群が SO(9) で全空間が SO(10) である９次元球面上の主バンドルに応用し、すでに知られている SO(9) の L-S カテゴリ数を用いて、SO(10) の L-S カテゴリ数が２１であることを証明した。