研究計画

野原 雄一

Lagrangian fibration とそれに関わる幾何学について研究する．Abel 多様体の場合の Lagrangian fibration とテータ関数の関係は幾何学的量子化やミラー対称性の言葉で説明することができる．より一般の場合にこれに対応する現象が興味の中心である．まず**旗多様体**上の **Gelfand-Cetlin 系**, **K3 曲面**上の **special Lagrangian fibration** と呼ばれる Lagrangian fibration について研究する．これらも幾何学的量子化やミラー対称性においても重要な例である．ここでは旗多様体や K3 曲面の退化を通して対象を研究する．一般的に幾何学的対象を "退化する直前" の多様体で調べることは有用な手法の一つであるが, Lagrangian fibration の場合にもこれを用いていろいろな結果が得られている．

旗多様体の Gelfand-Cetlin 系

旗多様体 $X = U(n)/T$ に対し Gelfand-Cetlin polytope と呼ばれる凸多面体 Δ が次の三通りの方法で関係している．

1. Gelfand-Cetlin 系 $X \to \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ の X の像が Δ となる,
2. 正則切断の空間 $H^0(X, L)$ ($U(n)$ の既約表現) は Δ の整数点と対応する基底 (Gelfand-Cetlin 基底) を持つ,
3. 旗多様体は Δ から定まるトーリック多様体に退化する．

1, 2 はトーリック多様体や Abel 多様体の場合と同じようなものだと思うことができる．この研究では Gelfand-Cetlin 系と Gelfand-Cetlin 基底のより直接的 (幾何学的) な関係を調べる．また, Gelfand-Cetlin 系のファイバーの曲率などの微分幾何的な性質, 表現論とのかかわりなどについても調べたい．これらの研究に, トーリック退化の下での Gelfand-Cetlin 系の変形に関する結果が使えると思われる．

同時にこの結果のミラー対称性への応用も考える．Cho-Oh はトーリック多様体に対して運動量写像のトーラスファイバーの Floer コホモロジーを計算したが, これを Gelfand-Cetlin 系の退化を用いて旗多様体の場合に拡張したい．これについては大阪大学の植田一石氏, 東北大学の西納武男氏との共同研究である．

K3 曲面の special Lagrangian fibration

special Lagrangian 部分多様体はそのホモロジー類の中で体積を最小にするものであり, 極小部分多様体論で重要な例である．また, Strominger-Yau-Zaslow によるミラー対称性の描像おいては special Lagrangian fibration の存在が本質的であった．この研究では K3 曲面の special Lagrangian fibration を退化を通して調べる．special Lagrangian 部分多様体の研究には Ricci-flat Kähler 計量の解析が関わっており, 解析的に難しい対象である．

ここでは主に二種類の退化を考える．一つは特異 Kummer 曲面 $X = A/(-1)$ の変形である．小林による Ricci-flat 計量の解析の結果を用いてテータ関数に相当する直線束の切断や Bergman 核の挙動を解析する．もう一つは, 最も一般的な場合である 24 本の特異ファイバーがある special Lagrangian fibration である．この場合には Gross-Wilson による Ricci-flat 計量の解析がある．これを用いて Bergman 核や正則切断などの挙動を調べる．Gross-Wilson による結果は, 巨大複素構造極限と呼ばれる退化に伴う Ricci-flat 計量と special Lagrangian fibration の退化の解析であった．この場合, K3 曲面が非コンパクトなものに収束するため, 適切な解析の枠組みを与えることが重要である．