研究の概略

野原 雄一

Lagrangian fibration とは, シンプレクティック多様体からの写像 $\pi : (M, \omega) \to B$ で, 一般のファイバー $\pi^{-1}(b)$ が Lagrangian 部分多様体 (即ち, $\dim \pi^{-1}(b) = \frac{1}{2} \dim M$ かつ $\omega|_{\pi^{-1}(b)} = 0$) になっているものを言う. 完全可積分系が典型的な例であり, 古典力学以来**幾何学的量子化**や**ミラー対称性**など数学や数理物理の様々なところに現れてきた. しかしほとんどの場合 Lagrangian fibration には特異ファイバーが存在するため, まだ完全に理解されているとはいえない.

Abel 多様体の射影埋め込みと Lagrangian fibration. Lagrangian fibration が関わる重要な話題にテータ関数の理論がある. Abel 多様体 A 上の豊富な直線束 L の切断はテータ関数で与えられることが知られているが, このテータ関数の空間の自然な基底が A の Lagrangian fibration とり方と関係している. このテータ関数の基底による Abel 多様体を射影空間へ埋め込みを考える. 射影空間には標準的な Lagrangian fibration である運動量写像があるが, L のベキを上げていくと, この運動量写像が Abel 多様体の Lagrangian fibration を Gromov-Hausdorff 位相で近似することを示した. これは, テータ関数の基底 (の列) から逆に Lagrangian fibration をある意味で再構成できるということである.

Kummer 多様体の射影埋め込みと Lagrangian fibration. (特異) Kummer 多様体とは, Abel 多様体 A の (-1) 倍写像による商のことである. Kummer 多様体 $A/(-1)$ 上の直線束の切断は Abel 多様体上のテータ関数から誘導される. これを用いて上記の Lagrangian fibration の近似定理をこの場合に拡張した. Kummer 多様体の場合は特異点が存在することが Abel 多様体の場合との一番の違いである.

一般の場合の考察. Abel 多様体の場合には Bergman 核と Lagrangian fibration のデータからテータ関数の基底が再構成できる. Bergman 核とは L の L^2 切断の空間から正則切断の空間への直交射影の積分核である. この構成を一般の場合に適用し, 得られた切断の直線束のベキを大きくしていく極限の下での挙動を調べた. 特にこのような切断がある Lagrangian ファイバーに集中していく様子を記述した (Abel 多様体の場合にはこの性質が本質的であった).

シンプレクティック商と Hamilton 極小性. シンプレクティック商の下での Lagrangian 部分多様体の平均曲率に対する公式を作った.

旗多様体のトーリック退化と Gelfand-Cetlin 系. 旗多様体 $X = U(n)/T$ には Gelfand-Cetlin 系と呼ばれる Lagrangian fibration がある. これは完全可積分系 $X \to \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ で, その旗多様体の像は Gelfand-Cetlin polytope と呼ばれる凸多面体 Δ になっている. さらに X は Δ から定まるトーリック多様体に退化することも知られている. この退化の下で Gelfand-Cetlin 系がトーラス作用の運動量写像に自然に変形することを示した. トーリック多様体はいろいろなものが具体的に計算できる多様体なので, この退化を用いてその計算を旗多様体の場合に拡張することを目的としている.