研究計画

境 圭一

$\mathbb{R}^n$ $(n>3)$ 内の（枠つき）long knot のなす空間 $\mathcal{K}_n$ $(\widetilde{\mathcal{K}}_n)$ の位相幾何学的な性質について，これまでの研究を踏まえ（「研究の概略」参照），引き続き二重ループ空間としての構造を中心に，関連する内容と共に研究をしていきたい．

(1) これまでの研究で，$\widetilde{\mathcal{K}}_n$ の二重ループ空間としての構造を用いて，三価グラフに起因しない（コ）ホモロジー類を幾通りかの方法で構成した．この構成を一般化し，配置空間上の反復積分 [1] により，三価でないグラフコホモロジーの元から，より多くの $H^*_{DR}(\mathcal{K}_n)$ の元を構成したい．

(1-1) この方向での研究が重要である理由の一つは，M. Kontsevich による次の予想である：

予想. $n>3$ のとき，Vassiliev [4] による $H^*(\mathcal{K}_n)$ に収束するスペクトル系列は，$\mathbb{R}$ 上で E_1 退化する．

この予想は別の方法 [2] により証明されているが，その方法は有理ホモトピー論によっている．Kontsevich の戦略は，E_1 項で $H^*(\mathcal{K}_n, \mathbb{R})$ を上から評価し，反復積分で構成した元たちによって下からの評価を与える，というものである．つまり $H^*(\mathcal{K}_n, \mathbb{R})$ の全ての元が反復積分で表されると述べていることに他ならず，反復積分によるアプローチの重要性が端的に示されている．

この研究のもう一つの重要性は，配置空間上の反復積分によって三価グラフから得られるコホモロジー類が，古典的な結び目や 3 次元多様体に対する摂動型不変量の「高次元版」であることにある．3 次元の場合，三価でないグラフに対応するものはあまり意識されていないように思われるが，私は既に $\mathcal{K}_n$ $(n>3)$ の場合に，三価でないグラフが非自明なコホモロジー類を与える例を構成している．3 次元の場合の対応物は，結び目に関してより精密な情報を含んだ「不変量」となるはずである．それは実際にどんなものか，またどれくらい多くあるか，という問題は非常に重要であると考えられる．この問題に取り組むにあたって，まず三価でないグラフから $H^*_{DR}(\mathcal{K}_n)$ の元をなるべく多く構成することが必要であると考えている．

(1-2) この構成での困難は，組み合わせ論の難しさにより，グラフコホモロジーの効率的な計算方法が知られていないことである．組み合わせ論的な困難を乗り越えるため，$\widetilde{\mathcal{K}}_n$ の幾何的な情報，すなわち operad の作用が導く $H_*(\widetilde{\mathcal{K}}_n)$ 上の Poisson 代数の構造に着目したい．即ち，反復積分を通してグラフコホモロジーが $H^*_{DR}(\widetilde{\mathcal{K}}_n)$ を完全に記述するという予想のもと，operad の作用が導く Poisson 代数構造（の双対）に対応する作用素がグラフコホモロジー（あるいは複体）上に定義されると考えられる．これを既知のグラフ（コ）サイクルに適用することで，新たな（コ）サイクルが構成されるはずである．これらに対応する $\widetilde{\mathcal{K}}_n$ の（コ）サイクルについては，私が例で計算したように，Kronecker 積を計算することによって非自明であるか否かを判定できると考えられる．

(1-3) 組み合わせ論の困難に対応するもう一つの方法として，有理ホモトピー論を用いることが考えられる．上で述べたグラフ複体や，Vassiliev の $H^*(\mathcal{K}_n)$ に収束するスペクトル系列 [4] などは，いずれも古典的なループ空間の研究で現れる bar 複体の類似物である．有理ホモトピー論においては，bar 複体と同値であるような様々な複体の構成が考えられている．これを我々の場合に応用することで，より小さい，あるいは計算が可能な複体にまで簡約できる可能性を考えている．

(2) $\mathcal{K}_n$ のトポロジーの応用例として，以下のような問題を考えている．ホモトピー論的な観点からは，$\mathcal{K}_n$ は点配置空間 $\mathrm{Conf}\,(\mathbb{R}^n, k)$ の "totalization" とみなされる [3]．この方法の利点は，$H^*(\mathcal{K}_n)$ あるいは $\pi_*(\mathcal{K}_n)$ に収束するスペクトル系列を，$\mathrm{Conf}\,(\mathbb{R}^n, k)$ の言葉で構成できる点である．従って，$\mathcal{K}_n$ の情報から，点配置空間に関わるトポロジー的対象の情報を引き出せる可能性がある．例えば $\pi_*(\mathcal{K}_n)$ については，スペクトル系列は $\pi_*(\mathrm{Conf}\,(\mathbb{R}^n, k))$ のなす Lie 代数，すなわち純組み紐群の降中心列に付随する Lie 代数を用いて記述される．この Lie 代数を $k \geq 1$ について集めたものは（余）単体的群をなし，純組み紐に対する Vassiliev 不変量や球面のホモトピー群などと関連する重要な対象である．これらがスペクトル系列を通してどのように $\mathcal{K}_n$ の幾何と関わるかを明らかにしていきたい．

References

[1] A. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, and R. Longoni, *Configuration spaces and Vassiliev classes in any dimensions*, Algebr. Geom. Topol. **2** (2002), 949–1000.

[2] P. Lambrechts, V. Turchin, and I. Volić, *The rational homology of spaces of knots in codimension* >2, math.AT/0703649.

[3] D. Sinha, *Operads and knot spaces*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), no. 2, 461–486.

[4] V. Vassiliev, *Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications*, Trans. Math. Monographs, vol. 98, Amer. Math. Soc.