研究成果

境 圭一

キーワード：long knot, 小正方形のなす operad，反復積分，点配置空間，グラフ複体,（純）組み紐群

(1) 概要．無限遠での挙動があらかじめ指定された埋め込み $f:\mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ を long knot と呼ぶ．また，long knot f の環状近傍 V_f の自明化 $w: V_f \xrightarrow{\approx} D^{n-1}\times\mathbb{R}^1$ が指定されているとき，組 (f,w) を枠つき long knot と呼ぶ．(枠つき) long knot 全体のなす集合 $\mathcal{K}_n$ $(\widetilde{\mathcal{K}}_n)$ を C^∞ 位相で位相空間とみなす．私は，特に $n>3$ の場合に，$\mathcal{K}_n$ および $\widetilde{\mathcal{K}}_n$ の位相幾何学的な性質を調べている（結び目理論とも関連するが，主な興味は空間 $\mathcal{K}_n$ のトポロジー自体にある）．

$\mathcal{K}_3$ に関する V. Vassiliev の研究を皮切りとして，$\mathcal{K}_n$ は様々な角度から調べられている．まず [3] 等で，ループ空間に対する K. T. Chen の反復積分の理論の精密化がなされ，3 次元内の結び目に対する摂動型不変量，およびその「高次元版」である $H^*_{DR}(\mathcal{K}_n)$ の元が，ある種のグラフの足し上げとして構成された．[2, 8] では，小正方形のなす operad の作用が幾何学的あるいはホモトピー論的に構成され，帰結として $\mathcal{K}_n$, $\widetilde{\mathcal{K}}_n$ が二重ループ空間のホモトピー型を持つことが示された．他にも，純組み紐群の降中心列に付随する Lie 代数と $\pi_*(\mathcal{K}_n)\otimes\mathbb{Q}$ の関連や，点配置空間の有理ホモトピー論など，興味深い手法が交錯している．私は主に，二重ループ空間の構造が導くホモロジー群上の Poisson 代数の構造について，上記のような様々な側面との関わりを通して研究している．

(2) 研究成果．$n>3$ の場合，$H_*(\mathcal{K}_n)$ の元を具体的に構成すること自体が十分になされていないのが現状である．その構成のため，私は（少なくとも三通りのやり方で定義される）operad の作用により $H_*(\mathcal{K}_n)$ 及び $H_*(\widetilde{\mathcal{K}}_n)$ 上に誘導される Poisson ブラケット λ を用いた．Poisson ブラケットとは，Leibniz 則を満たす次数つき Lie ブラケットである：

$$\lambda: H_p(X)\otimes H_q(X) \longrightarrow H_{p+q+1}(X), \quad \lambda(x,yz)=\lambda(x,y)z \pm y\lambda(x,z) \quad (X=\mathcal{K}_n,\ \widetilde{\mathcal{K}}_n)$$

ただし，積 yz 等は，結び目の連結和から誘導されるものである．任意の元 x,y に対し，$\lambda(x,y)$ が零であるか否かを計算する方法は確立していないが，私は以下に述べるような筋道により，ある $\lambda(x,y)$ が零でないことを示した．

(2-1) 反復積分によるアプローチは，あるグラフ複体から $\widetilde{\mathcal{K}}_n$ の de Rham 複体へのコチェイン写像 I を与える（$\mathcal{K}_n$ に対して [3] で構成され，$\widetilde{\mathcal{K}}_n$ に対して私が [6] で拡張した）．各頂点に集まる辺が丁度三本のグラフを三価グラフと呼ぶが，三価のグラフコサイクルから反復積分で得られる $H^*_{DR}(\widetilde{\mathcal{K}}_n)$ の元は，3 次元の場合の有限型不変量の積分表示に対応するものである．このコサイクルの双対にあたる $H_*(\widetilde{\mathcal{K}}_n)$ の元は，コード図（三価グラフの一種）を用いて [3] で構成された．一方で，グラフが三価でない場合は組み合わせ論的に難しく，何もわかっていなかった．

私はまず，$n>3$ が奇数のときに，三価でないグラフコサイクル Γ の例を具体的に構成した．そしてコード図から決まるある元 $x\in H_{n-3}(\widetilde{\mathcal{K}}_n)$, $y\in H_{2(n-3)}(\widetilde{\mathcal{K}}_n)$ に対して，[2] の operad 作用から決まる $\lambda(x,y)$ を考え，次を示した．

定理 1 ([7])**.** $n>3$ が奇数のとき，サイクル $\lambda(x,y)$ 上での $I(\Gamma)$ の積分は零でない．従って（コ）ホモロジー類 $\lambda(x,y)$, $I(\Gamma)$ は非自明であり，更にこれらは三価グラフに起因しない． □

(2-2) 私は [5, 6] において，ホモトピー論的な立場から $\mathcal{K}_n$ について考察した．$n>3$ のとき，$\widetilde{\mathcal{K}}_n$ はある余単体的空間の "totalization" として表される [8]．[4] において totalization への operad 作用が定義されており，従って $H_*(\widetilde{\mathcal{K}}_n)$ に Poisson 構造が入る（前項の意味と一致するとは限らない）．一方，[1] では totalization のホモロジー群に収束するスペクトル系列が構成された．その E^2 項は数理物理などにも現れる "Hochschild homology" と呼ばれるものに一致し，その上には Poisson ブラケットが代数的に定義される [9]．以上二つの Poisson 構造を比較したのが次の定理である．

定理 2 ([5, 6])**.** 上の二つの Poisson 構造は $H_*(\widetilde{\mathcal{K}}_n)$ 上一致する．特に，スペクトル系列を計算することにより，[4, 8] の意味での Poisson ブラケットを計算できる． □

定理 1 のサイクル $\lambda(x,y)$ は，定理 2 の意味での Poisson ブラケットからも構成することができる [5, 6, 9].

References

[1] A. Bousfield, *On the homology spectral sequence of a cosimplicial space*, Amer. J. Math. **109** (1987), no. 2, 361–394.

[2] R. Budney, *Little cubes and long knots*, Topology **46** (2007), 1–27.

[3] A. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, and R. Longoni, *Configuration spaces and Vassiliev classes in any dimensions*, Algebr. Geom. Topol. **2** (2002), 949–1000.

[4] J. McClure and J. Smith, *Cosimplicial objects and little n-cubes I*, Amer. J. Math. **126** (2004), no. 5, 1109–1153.

[5] K. Sakai, *Poisson structures on the homology of the space of knots*, Geom. Topol. Monogr. **13** (2008), Groups, homotopy and configuration spaces (Tokyo 2005), 463–482.

[6] ———, *On the space of knots and configuration space*, Ph.D. thesis, Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 2007.

[7] ———, *Non-trivalent graph cocycle and cohomology of the long knot space*, math.0711.4419.

[8] D. Sinha, *Operads and knot spaces*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), no. 2, 461–486.

[9] V. Tourtchine (Turchin), *On the homology of the spaces of long knots*, Adv. in topological quantum field theory **179** (2004), 23–52.