

研究計画

新庄玲子

本研究では、組み紐の分類に関連する問題に、結び目理論の観点からアプローチすることを考える。具体的には以下を計画している。

(1) 同じ結び目を閉包をとって持つ互いに共役でない組み紐の無限列の構成

J. S. Birman-W. W. Menasco の 3 次の組み紐の分類定理により、 $n \leq 3$ のとき、 n 次の組み紐の閉包として表される絡み目 (もしくは結び目) に対し、その絡み目を閉包として持つ n 次の組み紐の共役類は高々 3 つであることが知られているが、4 次以上の組み紐群においての状況は異なる。このことは、H. R. Morton と T. Fiedler が自明な結び目に対して、E. Fukunaga が $(2, p)$ トーラス絡み目に対して、それらを表す互いに共役でない 4 次の組み紐の無限列を与えていることから伺える。しかし、どのような結び目や絡み目が、このような無限列が持つのかは、明らかにされていない。論文 [4][6][7] では、結び目不変量と局所変形を利用して、このような無限列の構成という問題に取り組み、結び目に対して新たな無限列を構成した。ここで用いた手法は一部の絡み目には適用できるが、適用できない絡み目もあるので、一般の絡み目に適用できるように修正をしたい。[7] で与えた結果より、3 次以上の組み紐の閉包として表される全ての結び目は、次数を 1 つ上げることでこのような無限列が構成できることがわかるが、‘ある条件’ を満たす組み紐表示のできる結び目は、次数を上げることなく無限列を構成できるだろうと予想している。その予想の解決を目指す。最近、Y. Uchida は被覆空間を利用し、プレプリント [7] の結果の別証明を与えている。この手法を応用することで、証明ができていない部分を埋めることができる可能性があるため、その方向からも問題の解決に臨む。

Birman-Menasco は、同じ絡み目を閉包として持つ互いに共役でない n 次の組み紐の無限列が存在するのであれば、それらは exchange 変形のなす同値関係のもとで有限個の類に類別されることを示している。既に構成した無限列に関して、exchange 変形が組み紐の共役不変量に及ぼす影響などの考察を行うことで、組み紐の幾何的性質の解明に臨み、exchange 変形がなす同値関係による分類にも取り組みたい。

(2) 組み紐の既約性の判定法の確立

H. R. Morton は自明な結び目を閉包として持つ既約な組み紐の例を初めて与えており、T. Fiedler はそれを利用して自明な結び目を表す既約な 4 次の組み紐の無限列を与えている。しかし、一般には組み紐の既約性の証明は困難である。実際、彼らの用いた既約性の証明は 4 次の組み紐に限定されており、一般の次数への拡張は知られていない。しかし、安定化や非安定化が組み紐の共役類へ及ぼす影響を明らかにするためにも、既約な組み紐の考察は非常に重要であると考えられる。[4] では、Fiedler の与えた自明な結び目を表す互いに共役でない 4 次の既約な組み紐の無限列の一般化を試み、ある条件を満たす結び目に対して、その結び目の組み紐次数を次数に持つ組み紐で無限列を構成することができた。この無限列内の組み紐は、結び目の組み紐指数を実現していることから既約であることが従う。ここで与えた無限列は、既約な組み紐で構成されているという点で、Fiedler の無限列の拡張と言えるものになっているが、規約性の判定法として結び目の組み紐指数を利用したという点では拡張になっているとは言えない。最小性を保持していない組み紐に対しても用いることのできるという点で、Fiedler の用いた規約性の判定方法の拡張といえる判定法の確立を目指す。解決に有効な手法は見つかっていないが幾何的にも捉えやすい問題であるため、組み紐を代数的に捉えた時に失われる幾何学的情報に注目し、結び目理論の観点から取り組み、解決の手段を探る。