研究成果

新庄玲子

(1) 空間グラフのグラフホモロジー分類に関する研究

空間グラフのグラフホモロジー分類は, K. Taniyama により Wu 不変量を用いてなされていたが, 論文 [1] では, 空間グラフの Wu 不変量は, 2 つの 1 次元球面の非交和, 5 頂点完全グラフ, もしくは 3-3 頂点完全二部グラフに同相な部分グラフに対応する部分空間グラフの絡み数と Simon 不変量のみで決まることを示した. 絡み数と Simon 不変量は, ともに正則図から簡単に計算ができるので, 空間グラフのグラフホモロジー分類が簡単な計算で与えられることになった. さらに T. Motohashi-Taniyama が, グラフの二つ空間埋め込みが空間グラフホモロガスであることとデルタ変形で移りあうことは同値であることを, また Taniyama-A. Yasuhara が, グラフの 2 つの空間埋め込みがデルタ変形で移りあうならば, それらの次数 1 の有限型不変量は一致するということを示していることから, グラフの空間埋め込みの次数 1 の有限型不変量が絡み数と Simon 不変量によって決定されることも分かった.

(2) 空間グラフに含まれる結び目の張る局面に関する研究

論文 [3] では, K. Kobayashi によって導入された局所自明空間埋め込みに着想を得て, グラフの空間埋め込み (空間グラフ) の (a collection of) spanning surfaces いう概念を導入し, それに関する研究を行った. グラフの空間埋め込みに含まれるグラフの 1 次元ホモロジー群の基底に対応する結び目に, 互いに内部が交わらない円板が張ることができるとき, その埋め込みは局所自明であるという. 空間グラフの spanning surfaces とは, 空間グラフに含まれる結び目に張られた, 異なる境界を持つ互いに内部の交わらない連結でコンパクトな向き付け可能曲面の集合のことである. 特に各曲面が円板と同相なとき spanning disks という. T. Endo-T. Otsuki により, 全てのグラフが局所自明空間埋め込みを持つことが示されているが, 一般にグラフの 1 次元ベッチ数は, その空間埋め込みに張られる spanning surfaces の枚数の上限になっていないので, その上限を与えることを試みた. そして, 全てのグラフの空間埋め込みに張ることができる spanning surfaces の枚数を, グラフのブロック分解の各成分の 1 次元ベッチ数により定まる値で上から評価し, さらにそれが上限となることを, その値を円板で実現する空間埋め込みを与えることによって示した.

論文 [2] では, 含まれる全ての結び目に対応する spanning surfaces が存在するグラフの空間埋め込みをグラフの境界空間埋め込みと定義し, それに関する研究を行った. 全てのグラフが境界空間埋め込みを持つわけではないことが論文 [3] で与えた評価式より分かる. 始めに境界空間埋め込みを持つグラフの完全な特徴づけを行った. 次に境界空間グラフの幾何的な性質について考察し, 境界空間埋め込みの自己パス変形による分類を与え, さらに与えられたグラフの二つの境界空間埋め込みは自己シャープ変形と呼ばれる局所変形によって互いに移り合うことを示した. これらの結果は L. Cervantes-R. A. Fenn と T. Shibuya による境界絡み目に関する結果の自然な拡張となっている.

(3) 同じ結び目を表す互いに共役でない組み紐の無限列の構成

J. S. Birman-W. W. Menasco の 3 次の組み紐の分類定理により, n が 3 より小さいとき, n 次の組み紐の閉包として表される絡み目に対し, その絡み目を閉包として持つ n 次の組み紐の共役類は高々3 つであることが知られている. それに対し H. R. Morton と E. Fukunaga はそれぞれ, 自明な結び目, $(2, p)$-トーラス絡み目 ($p \geq 2$) を閉包として持つ互いに共役でない組み紐の無限列を構成しており, T. Fiedler は閉包が自明な結び目になる規約な 4 次の組み紐の無限列を構成している. プレプリント [7] では, Morton と Fukunga の構成方法を利用し, 結び目または, ある条件を満たす絡み目を閉包として持つ n 次の組み紐 ($n \geq 3$) と同じ閉包を持つ互いに共役でない $n+1$ 次の組み紐の無限列を与えた. また, 組み紐置換を利用することで, ある条件を満たす n 次の組み紐 ($n \geq 3$) に対し, それと同じ閉包を持つ互いに共役でない n 次組み紐の無限列の構成できた.