これまでの研究成果のまとめ

山本 亮介

任意の有向閉 3 次元多様体 M には必ずファイバー結び目 (絡み目) が存在し、M をファイバー結び目 (絡み目) の近傍と円周上の曲面束とに分解できる。これを M のオープンブック分解と呼ぶ。M のオープンブック分解の構造の研究は、そのファイバー曲面の構造によって記述するという視点から様々になされて来た。中でも村杉和と呼ばれる曲面同士の結合方法の重要性が Gabai により明かにされている。例えば、曲面 R を 2 つの曲面 R_1, R_2 の村杉和とするとき、R がファイバー曲面であるための必要十分条件は、R_1, R_2 が共にファイバー曲面であることである。

私は、S^3 のオープンブック分解をそのファイバー曲面の村杉和に関する構造によって記述しようという観点に立ち、以下の研究成果を得ている。

- ホップバンド (1 回捻られたアニュラス) は，円盤を除けば S^3 内の最も単純なファイバー曲面である。ホップバンドをいくつか村杉和して得られるファイバー曲面 (ホッププラミングと呼ぶ) は村杉和に関する最も基本的な構造であるが、S^3 内の交代ファイバー絡み目のファイバー曲面は必ずホッププラミングである [村杉]。東京農工大の合田氏、学習院大の平沢氏と共同で、概交代ファイバー絡み目のファイバー曲面についても、上記と同様の事が成立することを示した。

- Harer は、“S^3 内の任意のファイバー曲面は、(1) ホップバンドを村杉和する、(2) ホップバンドを取り去る [(1) の逆操作]、(3) Stallings twist を施す、という 3 つの操作によって円盤から構成される” ことを示し、さらに” 操作 (3) は不要である” と予想した。(3) の Stallings twist という操作は、ファイバー曲面 Σ に対し Σ 上のある特別な閉曲線 c に沿って Dehn twist を施すことである。私は、Stallings twist 操作にある複雑度を定め、以下の Harer 予想の部分的な肯定的解答を得た。

  “複雑度 1 の Stallings twist は、操作 (1) と (2) を 1 回ずつにより実現される。”

一般の有向閉 3 次元多様体 M が許容するオープンブック分解に関する研究の成果として以下がある。

- 奈良女子大学の斎藤氏との共同研究において、ファイバー曲面上に本質的に埋め込まれた arc の isotopy 類が成す arc complex という対象を用いてオープンブック分解のある種の複雑度を定義し、その性質を調べた。その結果、次を得た。

  “与えられたオープンブック分解が、村杉和に関してより単純なオープンブック分解に分解できるなら、その複雑度は 2 以下、Stallings twist を許容するなら 3 以下。”

- M 内のファイバー結び目 K に関し、そのファイバー曲面 Σ 上に本質的に埋め込まれた arc たちと、それらのモノドロミー写像による像との間の代数的交点数によって、K のアレキサンダー多項式 (の各係数の値) を具体的に記述する研究を行なった。

有向閉 3 次元多様体 M のオープンブック分解に対し、そのファイバー曲面に正捻りホップバンドを村杉和すると、M の新たなオープンブック分解を得る。これをオープンブック分解の正の安定化と呼ぶ。Giroux により、M の全てのオープンブック分解の正の安定化による同値類と、M の全ての正の接触構造 (の同型類) との間の 1 対 1 対応が示された。

- オープンブック分解が Stallings twist 操作を許容するとき、この 1 対 1 対応によって対応する接触構造がどのようなものであるかという問題について、以下の解答を得た。

  “与えられたオープンブック分解は、Stallings twist を許容するオープンブック分解と正の安定化のもとで同値であるとき、またそのときに限り、overtwisted 接触構造に対応する。”