今後の研究計画

安田　貴徳

(1)　残りの CAP 形式を構成する。
$Sp(2)$ の四元数的内部形式 G の CAP 形式をいくつか構成したわけだが、まだ他にも CAP 形式が存在する。例えば、齋藤黒川表現の内部形式版の場合でも、$GL(2,\mathbb{A})$ の無限次元既約 cusp 表現 π に対し、その標準 L-函数が $s=1/2$ で 0 でない場合は構成できているが、そうでない場合はまだ構成できていない。この場合は Piatetski-Shapiro の構成法に倣い $SL(2)$ の２枚被覆からのテータリフトで作る方法が考えられる。それ以外に Soudry が構成したような non-Siegel parabolic 部分群に関する CAP 形式の内部形式版も存在するはずである。これらは階数１の歪エルミート空間のユニタリ群からのテータリフトで作れるであろう。これらに関してはその構成法からまた Hasse 原理の不成立から "重複度１"が成り立たないものが作られるはずである。また Piatetski-Shapiro や Soudry が行ったように CAP 形式の L-函数による特徴付けも考えていきたい。そのためにはまず G に対する L-函数の定義を考えなければならない。

(2)　吉田リフト、荒川リフトの non-vanishing の条件を記述する
齋藤黒川表現にあたる G の CAP 形式は四元数環 R 上の階数２の歪エルミート空間 V の特殊ユニタリ群 $SU(V)$ の既約 cusp 表現からのテータリフトで作られた。$SU(V)$ はある四元数環 B が存在し、次のように実現される。

$$\{(b,\widetilde{b})\in B^\times\times\widetilde{B}^\times \mid \nu_B(b)=\nu_{\widetilde{B}}(\widetilde{b})^{-1}\}/\{(z,z^{-1})\mid z\in k^\times\}.$$

ここで $\widetilde{B}$ は k のブラウアー群で $B\cdot R$ と一致する四元数環であり、$\nu_B,\nu_{\widetilde{B}}$ はそれぞれ $B,\widetilde{B}$ の被約ノルムである。これにより $SU(V_\mathbb{A})$ の既約 cusp 表現はおおよそ $B_\mathbb{A}^\times$ の既約 cusp 表現と $\widetilde{B}_\mathbb{A}^\times$ の既約 cusp 表現のテンソル積と見ることができる。CAP 形式を作る場合 $SU(V_\mathbb{A})$ の既約 cusp 表現としては $\pi\otimes\mathbf{1}$ の形のものだけ考えればよかった。ここでこの片方の表現が自明であるという条件を取り除く。すなわち一般に $\pi_1\otimes\pi_2$ の形の $SU(V_\mathbb{A})$ の既約 cusp 表現を考えると、それから得られるテータリフトは吉田リフト、荒川リフトと呼ばれるものになる。これらのリフトはテータ積分として定義はできるが、像が 0 になる場合もある。この像が消えないための必要十分条件は分かっていない。古典的な例から条件の推測はできるが、より一般的な形で条件を記述したい。